SYSTÈME AUTOMATISÉ

I- DESCRIPTION D'UN SYSTÈME ASSERVI :

A. Système asservi :

Un système asservi est un système comportant une boucle directe (boucle d'action) qui réalise une tâche en fonction de la commande d'entrée corrigée par une boucle de retour (boucle de rétroaction -feedback-) tenant compte de la valeur de sortie (mesurée par un capteur).
Un régulateur élabore un signal de commande à partir de l'écart entre la valeur d'entrée (consigne) et la valeur de retour de la boucle de feedback.

B. Entrées et sorties :

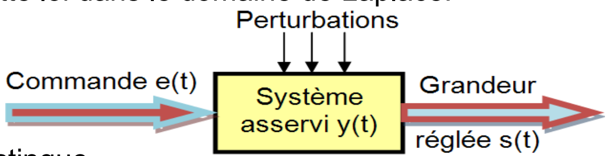
Entrées : ce sont les éléments, grandeurs, signaux ou informations qui, issus du milieu extérieur, apportent au système ce dont il a besoin pour accomplir sa mission.
Dans un système asservi, les entrées sont de plusieurs types :
- Les grandeurs de commande modifiables et contrôlables par l'opérateur. La nature du signal d'entrée est généralement différente de la nature du signal de sortie.
Exemple : à la tension d'entrée **U(t)** d'un moteur correspond la vitesse de rotation **ω(t)** de l'arbre de sortie.
- Les grandeurs de retour qui servent à informer le régulateur.
- Les signaux parasites appelés perturbations que l'on ne maîtrise pas et que l'on subit.

Sortie : élément, grandeur, signal ou information produit par le système. Pour un système asservi, la sortie est utilisée (boucle de rétroaction) pour juger la qualité de la tâche accomplie.

C. Commande :

Elle est définie par la loi d'entrée/sortie qui gère les variables du système.
La fonction de transfert H(p) = S(p) / E(p) correspond à cette loi dans le domaine de Laplace.

II- LES SYSTÈMES ASSERVIS – GÉNÉRALITÉS :

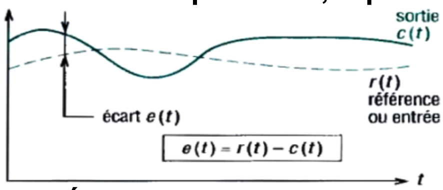


A- Définition : Un système est dit asservi lorsque la grandeur de sortie suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (ordre ou consigne) quels que soient les effets perturbateurs extérieurs, on distingue.

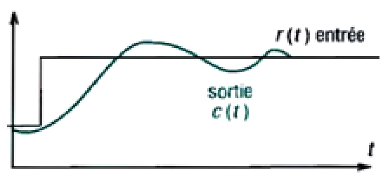
♦ **Système asservi continu :** si, à toutes entrée E(t) quel que soit t, il délivre une réponse S(t).
♦ **Système asservi linéaire :** s'il répond au principe de superposition.
♦ **Système asservi invariant :** s'il garde le même comportement au cours du temps.

B- Comportement des systèmes :

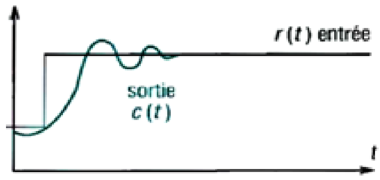
Le comportement des systèmes bouclés est mis en évidence et défini par trois caractéristiques fondamentales : **précision, rapidité et stabilité.**



Écart et précision



Système lent

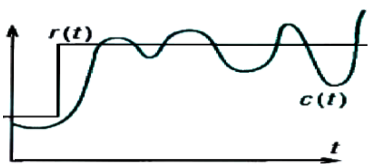


Système rapide

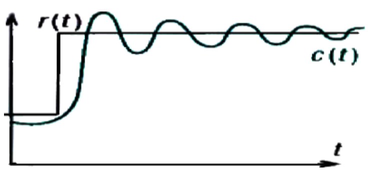
Précision : elle traduit l'écart ou l'erreur, noté e(t), avec laquelle la sortie *c(t),* «grandeur réglée par le système», suit la loi d'entrée, référence ou consigne r(t).
(La précision est mesurée par l'écart entre le résultat attendu et le résultat obtenu)

Rapidité : elle caractérise la capacité du système à réagir vite à une perturbation donnée.
Il s'agit, autrement dit, de son aptitude. Suite à une perturbation subie, à se rapprocher dans le temps le plus court possible de la valeur d'entrée ou consigne ''temps de réponse''.
(La rapidité est mesurée par le temps mis par le système pour obtenir la sortie souhaitée)

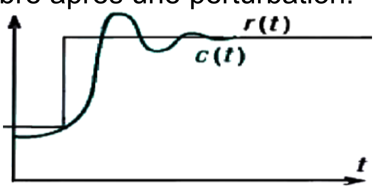
Stabilité : elle définit la capacité du système à reprendre sa position d'équilibre après une perturbation.



Système instable

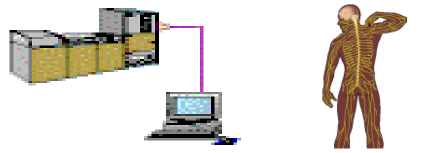


Système stable mal amorti

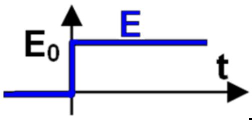


Système stable bien amorti

Remarque : précision, rapidité et stabilité sont étroitement liées. En conception des systèmes bouclés, on cherche à rendre compatibles rapidité, précision et bon amortissement.

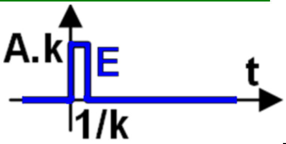


C- Bilan et analyse selon le signal d'entrée :



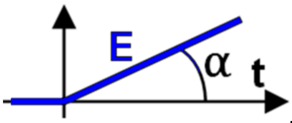
$E(t) = E_0.u(t)$ pour $t > 0$

L'entrée **Échelon**



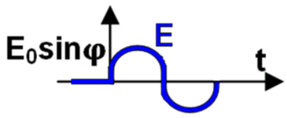
$E(t) = A.\delta(t)$ impulsion de Dirac, $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$

L'entrée **Impulsion**



$E(t) = a.t.u(t)$ $t > 0$, avec $a = \tan\alpha$

L'entrée **Rampe**



$E(t) = E_0.\sin(\omega_0.t+\varphi)$ pour $t > 0$

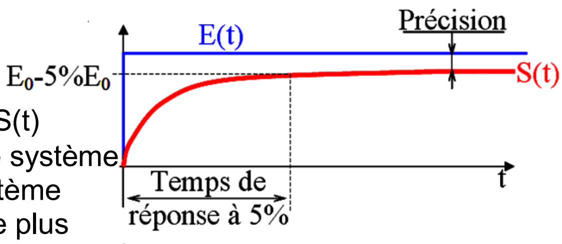
L'entrée **Sinusoïdale**

D- Réponse à ces entrées types :

Le signal réponse d'un système se décompose en deux temps : il passe d'abord par un **régime transitoire**, puis atteint ensuite un **régime permanent**.

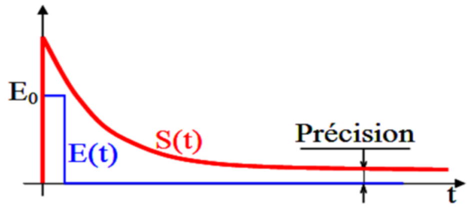
- En **régime définitif** ou **pérmanent**, sous l'action d'un de ces signaux d'**entrée**, un système linéaire tend à présenter également en **sortie** un signal du même type. Si, en régime définitif (au bout d'un certain temps), il existe une **différence** entre le signal de sortie et le signal d'entrée, alors il y a une **erreur permanente**. On peut déterminer les différents critères de performance d'un système en étudiant sa réponse à ces signaux d'entrée type.

♦ **Réponse à une entrée Échelon :**



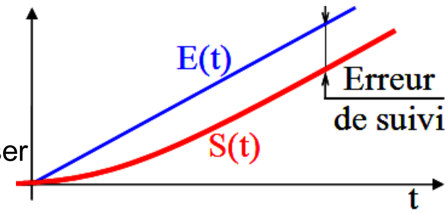
Dans le cas d'une **entrée en échlon**, **l'erreur permanente** s'appelle **écart statique** ou **précision :** c'est l'écart entre la valeur du signal d'entrée et la réponse S(t) en régime définitif ($t\rightarrow\infty$) ; plus cet écart sera **faibl e**, plus le système sera **précis**. On peut également juger de la **rapidité** du système en mesurant le temps au bout duquel la réponse ne s'écarte plus que de 5% de la valeur E_0 du signal d'entrée.

♦ **Réponse à une entrée Impulsionnelle :**



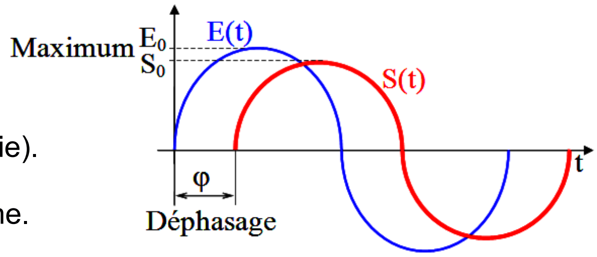
Cet essai permet de tester les performances du système face à des **perturbations** brèves et d'observersa stabilité, c'est-à-dire de voir si la réponse du système ne s'écarte pas définitivement de sa position.

♦ **Réponse à une entrée Rampe :**



Cet essai permet d'évaluer les capacités du système à suivre une consigne variable. L'**erreur permanente** mesurée s'appelle **erreur de suivi** ou **erreur de traînage**. En pratique, on essaie d'annuler cette erreur ou de fixer un seuil d'erreur à ne pas dépasser (sécurité en cas d'obstacle rencontré pendant le fonctionnement d'un robot par exemple).

♦ **Réponse à une entrée Sinusoïdale :**



La réponse d'un système à une entrée sinusoïdale est sinusoïdale, de même période avec une amplitude S_0 et un déphasage φ (correspondant à une erreur de suivie). Un essai en entrée de type sinusoïdal permet d'étudier la **stabilité** et surtout la **marge de stabilité** d'un système.

- En **régime Transitoire**

Tout système possède un régime tansitoire précédant le régime permanent. Si le système est mal amorti en régime tansitoire, S(t) peut prendre des valeurs trop importantes et donc ne pas atteindre un régime permanent stable. Il faut égalemnt veillé à ce que ce régime tansitoire soit de courte durée (critère de rapidité).
Le régime tansitoire d'un système de commande doit être bien amorti et suffisamment rapide.

III- ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES → TRANSFORMÉES DE LAPLACE ET SES APPLICATIONS :

A- Définition : La transformée de Laplace de la fonction f(t), telle que f(t)=0 pour t<0 est :

$$f(t) \xrightarrow{L} L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt \ \text{où} \ p \in \mathbb{C}$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel dans le domaine de Laplace.

Nom de la fonction	domaine temporel	domaine de Laplace
Linéarité	$[a.f1(t)+bf2(t)].u(t)$	$a.F1(p) + b.F2(p)$
Dérivation	$f'(t).u(t)\,;f''(t).u(t)$	$p.F(p) - f(0^+)\ ;\ p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)$
Intégration	$\int_0^t f(x).dx.u(t)$	$\frac{F(p)}{p}$
Retard	$f'(t-T).u(t-T)$	$e^{-Tp}.F(p)$
Facteur d'échelle	$f(at).u(t)\ \text{où}\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}.F\left(\frac{p}{a}\right)$
Amortissement	$e^{-at}f(t).u(t)\ \text{où}\ a = Cte$	$F(p+a)$
Multiplication par t^n	$t^n f(t).u(t)$	$(-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n}$
Valeur initiale	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(t)$	$\lim\limits_{p\to +\infty} pF(p)$
Valeur finale	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(t)$	$\lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$

Ce tableau sera appelé **'' Tableau de référence''** des transformées de Laplace.
Il est bon d'en connaître les expressions les plus couramment utilisées.

f(t).u(t)	F(p)	f(t).u(t)	F(p)
δ(t) (impulsion)	1	$e^{at}.t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
K.1 (échelon unité)	$\frac{K}{p}$	$e^{-at}.t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
K.t	$\frac{K}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

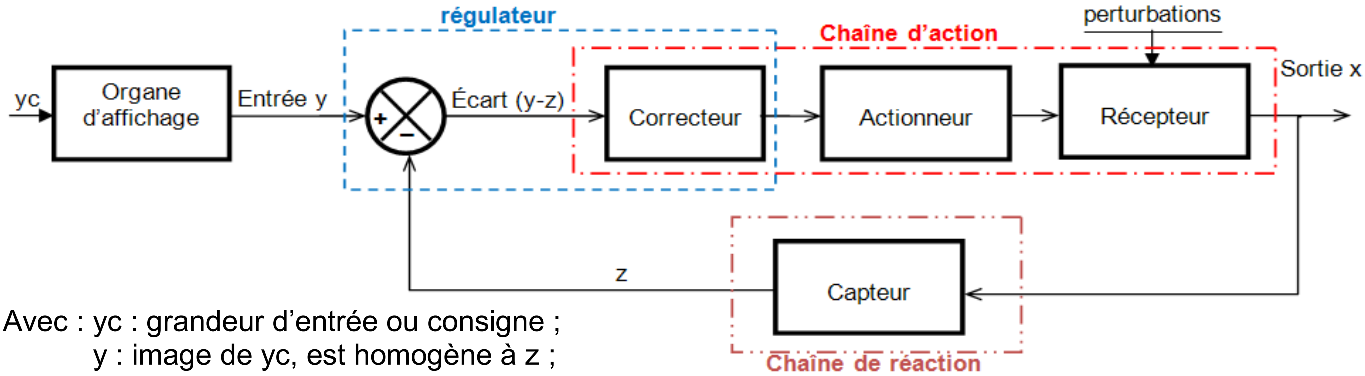
Fonction transfert H(p) ⟶ entrée ? Selon le signal d'entrée, on choisit la colonne de gauche ou de droite.

Entrée standard (domaine temporel) **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **F**ermée **(F.T.B.F)** e(t) = entrée standard Laplace ⟶ E(p) = Tableau de référence (ci-dessus)	Entrée sinusoïdale (domaine fréquentiel) **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **O**uvert **(F.T.B.O)** e(t) = e_0.sin(ωt) s(t) = s_0.sin(ωt+φ)
H(p) = S(p) / E(p) ⟶ S(p) = H(p) . E(p)	Écrire p = jω dans la F.T.B.O
Décomposition en éléments simples Transformées inverses de Laplace Équation temporelle de la sortie s(t) FT du premier ordre $\frac{K}{1+\tau p}$ K : gain statique τ : constante de temps FT du second ordre $\frac{K}{\left(1+2\frac{\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0}p^2\right)}$ racine réelles $\frac{1}{p+a}$ racine complexes $\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$ racine complexes $\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ stabilité : critère de Routh.	Amplitude : $\lvert H(j\omega)\rvert$ Gain : $20\log\lvert H(j\omega)\rvert$ Phase : $Arg\left[H(j\omega)\right]$ FT du premier ordre $20\log\lvert K\rvert$ $\omega_c=\frac{1}{\tau}$ (*fréquence de coupure*) *pente à l'∞ : −20 dB / déc* FT du second ordre $20\log\lvert K\rvert$ $\omega_c=\omega_0$ (*fréquence de coupure*) *pente à l'∞ : −40 dB / déc* $\omega_{rMaxi}=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ (*résonance*) Stabilité : marge de phase et de gain.

B- Fonctions d'un système asservi :

- Observation de l'état du système ⟶ Utilisation de capteur.
- Comparaison – Réflexion ⟶ L'état mesuré est comparé à l'état souhaité et la modification éventuelle de la commande est déterminée. L'organe qui réalise ces deux fonctions est appelé régulateur.
  Il est composé d'un comparateur ou soustracteur et d'un correcteur.
- Action L'actionneur apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche.

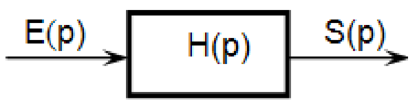
C- Schéma fonctionnel d'un système asservi élémentaire (dans le domaine temporel) :



Avec : yc : grandeur d'entrée ou consigne ;
y : image de yc, est homogène à z ;
y- z : est l'erreur ;
x : grandeur de sortie ;
z : mesure de capteur.

D- Schéma fonctionnel d'un système asservi dans le domaine symbolique de Laplace :

H(p) : **Transmittance** ou **fonction de transfert** d'un système dans le domaine de Laplace



IV- SCHÉMAS FONCTIONNELS : (Schémas-blocs)

4.1- Fonction de transfert :

En Classes $2^{ème}$ STM, l'étude des systèmes asservis se ramène toujours à la mise en place dans le domaine temporel d'une ou plusieurs équations différentielles à coefficients constants de la forme :

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 = e(t) \quad \text{c.à.d ;} \quad a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 = e(t)$$

L'utilisation des transformées de Laplace permet de transférer ces équations dans le domaine de **Laplace** appelé aussi domaine **symbolique** (où il est convenu de prendre la lettre **p** comme paramètre).

L'étude théorique des systèmes linéaires à coefficients constants permet de mettre en place une relation de type **S(p) = H(p).E(p)**, avec :

- **H(p)** est appelée fonction de **transfert du système** (on emploie aussi la transmittance).
- **S(p)** représente la sortie du système alors que **E(p)** représente l'entrée dans le domaine de **Laplace**.

4.2- Interprétation de la fonction de transfert :

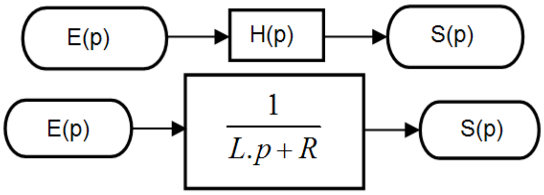
La réponse impulsionnelle a pour expression dans le domaine de Laplace : **E(p) = 1**.

Il paraît alors logique de dire que la fonction de transfert est la transformée **H(p)** de Laplace de la réponse impulsionnelle. Car il suffit de remplacer **E(p)** dans l'expression **S(p) = H(p). E(p)** par 1 pour obtenir **S(p) = H(p)**.

Mais générer une entrée impulsionnelle réelle est pratiquement impossible. La remarque précédente n'a donc pas d'intérêt pratique.

4.3- Schématisation de la fonction de transfert : (schéma fonctionnel ou schéma-bloc)

a- Blocs :

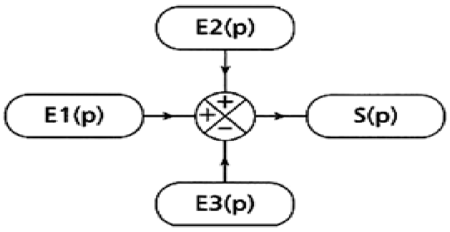


On convient de modéliser une fonction de transfert par un rectangle dans lequel on définit la fonction de transfert **H(p)**.

À ce rectangle, on associe une entrée **E(p)** et une sortie **S(p)**.

Le rectangle associé à la fonction de transfert est le bloc du schéma fonctionnel. (Exemple)

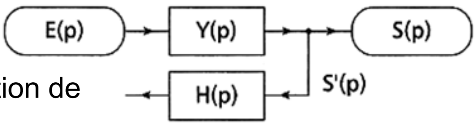
b- sommateurs :



Les sommateurs permettent des opérations entre les blocs.
Ils annoncent l'addition ou la soustraction d'une entrée.
Ils se représentent par des cercles munis d'une croix.
Les signes ''**+**'' ou ''**-**'' associés aux branches entrantes précisent si l'entrée s'additionne ou se soustrait.
Ces sommateurs sont multi-entrée mais ne possèdent qu'une sortie.

c- Jonctions ou points de prélèvement :

Une branche de prélèvement se représente selon le schéma suivant :



Important : une branche de prélèvement prend le même signal que la branche principale et n'affecte pas le signal de cette branche principale. Ici, **S(p)** et **S'(p)** prennent la valeur **Y(p).E(p)** sans altération de cette valeur. On dit qu'un prélèvement est non perturbateur.

4.4- Schématisation de la fonction de transfert d'un système complexe :

La description d'un système complexe conduit à écrire plusieurs équations différentielles faisant intervenir plusieurs variables intermédiaires reliées entre elles. Le passage dans le **domaine de Laplace** rend linéaire le système d'équations.

La fonction de transfert globale est alors une combinaison des fonctions de transfert élémentaires.

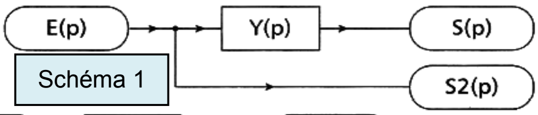
On peut définir la fonction de transfert globale à l'aide de deux méthodes :

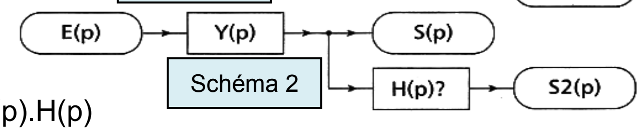
1) Résoudre le système d'équations définies dans le domaine de Laplace.
2) Construire les schémas fonctionnels de chaque fonction de transfert élémentaire :
   - Placer les entrées et les sorties de chaque fonction de transfert en coïncidence, c'est-à-dire relier la sortie de la fonction de transfert 1 à l'entrée de la fonction de transfert 2 par exemple, etc.
   - Appliquer les règles relatives aux schémas fonctionnels.
   - En déduire la **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **F**ermée (**FTBF**).

4.5- Règles de déplacement dans les opérations sur les schémas fonctionnels :

Le déplacement d'un sommateur ou d'un point de prélèvement ne doit pas affecter le système.
On en déduit les règles suivantes :

a- Déplacement des points de prélèvement :



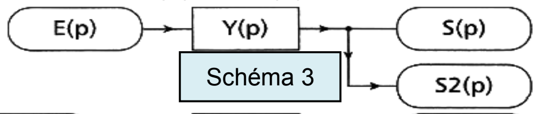


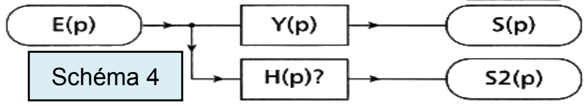
1) Prendre un point de prélèvement placé **avant** un bloc, pour le placer après le bloc.

Démonstration :

- Schéma **1** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = E(p).
- Schéma **2** : S2(p) doit être **inchangé** ; S2(p) = E(p).Y(p).H(p)

doit rester égal à E(p). On constate la nécessité d'interposer une fonction H(p) = 1/Y(p) de façon que Y(p).[1/Y(p)] = 1 qui permettra une sortie S2(p) inchangée.





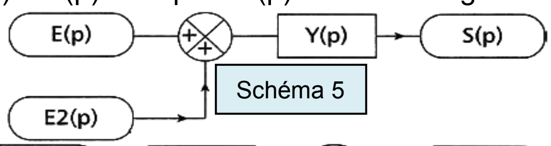
2) Prendre un point de prélèvement placé **après** un bloc, pour le placer avant le bloc.

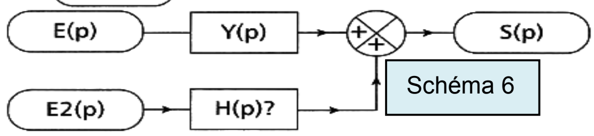
Démonstration :

- Schéma **3** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = Y(p).E(p).
- Schéma **4** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = H(p).E(p) = S(p).

On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) = Y(p) afin que S2(p) reste inchangée.

b- Déplacement des sommateurs :



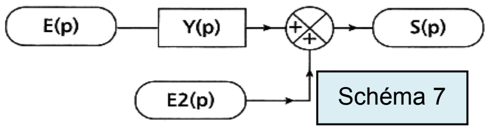


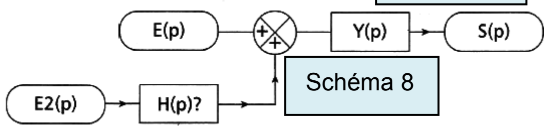
1) Prendre un somrnateur placé **avant** un bloc, pour le placer après le bloc.

Démonstration :

- Schéma **5** : S(p) = [E(p) + E2(p)].Y(p).
- Schéma **6** : quelle fonction de transfert H(p) faut-il placer pour que S(p) reste inchangée ?

S(p) = E(p).Y(p) + H(p).E2(p) = [E(p) + E2(p)].Y(p) = solution du schéma 5.
On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) = Y(p) afin que S(p) reste inchangée.





2) Prendre un sommateur placé **après** un bloc, pour le placer avant le bloc.

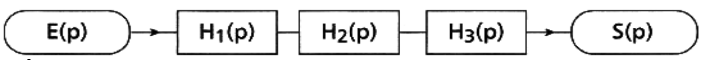
Démonstration :

- Schéma **7** : S(p) = E(p).Y(p) + E2(p).
- Schéma **8** : quelle fonction de transfert H(p) faut-il placer pour que S(p) reste inchangée ?

S(p) = [E(p) + E2(p).H(p)].Y(p) = E(p).Y(p) + E2(p) = solution du schéma 1 E2(p).H(p).Y(p) = E2(p).
On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) =1/Y(p) afin que S(p) reste inchangée.

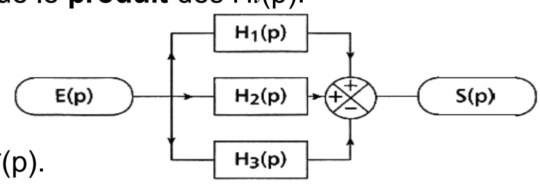
4.6- Types d'association de fonctions de transfert :

a- Ensemble en série :



Si ''n'' éléments de fonction de transfert Hi(p) sont placés en **série**, la fonction de transfert globale est alors H(p) = H1(p).H2(p).H3(p) ... Hn(p). L'ensemble en **série** implique le **produit** des Hi(p).

b- Ensemble en parallèle :



Si ''n'' éléments de fonction de transfert Hi(p) sont placés en **parallèle**, la fonction de transfert globale est alors H(p) = H1(p) **+** H2(p) **-** H3(p) **+** ... Hn(p).
L'ensemble en **parallèle** implique la **somme** algébrique des Hi(p).

c- Fonction de transfert équivalente d'une Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :

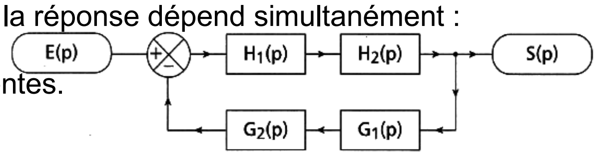
Un système dynamique (**boucle fermée**) est un système dont la réponse dépend simultanément :

- de la commande en cours,
- de la réponse et des conséquences des commandes précédentes.

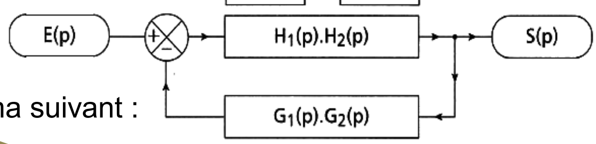
Une fonction de transfert en boucle fermée est composée :

- d'une fonction de transfert pour la boucle directe : **H(p)**,
- d'une fonction de transfert pour la boucle de retour : **G(p)**.

Le schéma fonctionnel d'une **F.T.B.F** est le suivant :



Les règles des schémas-blocs permettent de passer au schéma suivant :



d- Écriture d'une fonction de transfert en boucle fermée par absorption de la boucle de retour :

Le but est de déterminer la **F.T.B.F**. Pour cela, on rend équivalents les deux schémas fonctionnels suivants :

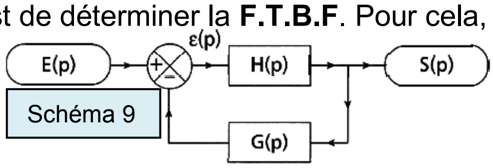


Schéma 9

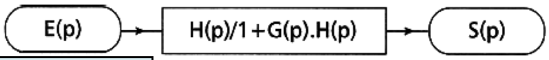


Schéma 10

Démonstration : Puisqu'un sommateur se trouve avant la fonction de transfert H(p), la sortie S(p) dépend de E(p) et d'une autre fonction de transfert qui se retranche grâce à ce sommateur.
Appelons ε(p) la différence entre les deux entrées.
Ainsi, S(p) = H(p).ε(p) après le passage de ε(p) dans H(p). La boucle de retour apporte au sommateur la valeur G(p).S(p), car au point de prélèvement, le retour vers G(p) est égal à S(p) d'après la règle des points de prélèvement. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(p) = E(p) - G(p).S(p). \\ S(p) = H(p).(E(p) - G(p).S(p)) = H(p).E(p) - H(p).G(p).S(p). \\ S(p) + H(p).G(p).S(p) = H(p).E(p). \\ S(p).(1 + G(p).H(p)) = H(p).E(p). \end{array}\right\} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+G(p).H(p)} = F(p)$$

Il y a équivalence entre les deux schémas fonctionnels 9 et 10 si l'on remplace l'association de la chaîne directe et de la chaîne de retour par une seule chaîne directe dont la F.T.B.F est F(p).

Remarque : Cas du système à retour unitaire : c'est le cas où la branche de retour renvoie la valeur de la sortie S.
Dans ce cas, ε(p) = E(p) - S(p), c'est-à-dire G = 1 (d'où son appellation de retour unitaire).

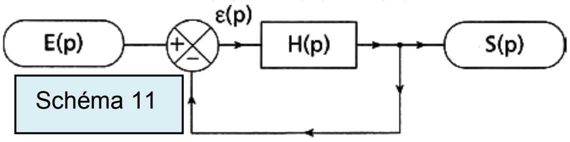


Schéma 11

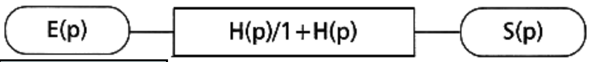


Schéma 12

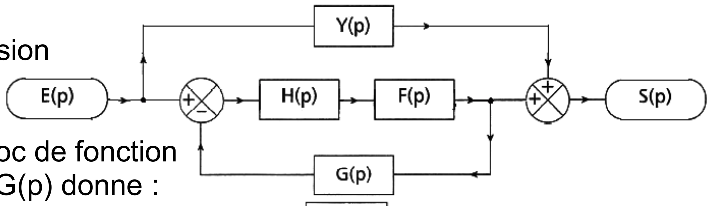
$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)}$$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

APPLICATIONS

App1 (avec correction) :

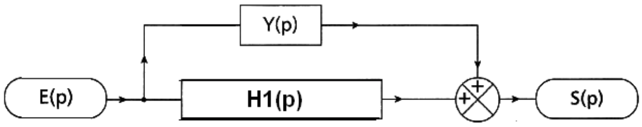


À partir du schéma-bloc suivant, **donnez** l'expression de la F.T.B.F. en absorbant les boucles de retour.

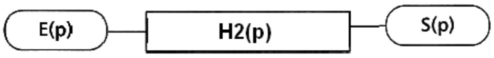
Résolution App1 :

On peut déjà regrouper H(p) et F(p) en un seul bloc de fonction de transfert H(p).F(p). L'association H(p).F(p) et G(p) donne :

$H1(p) = \dfrac{H(p).F(p)}{1 + H(p).F(p).G(p)}$ à placer dans le schéma 2.



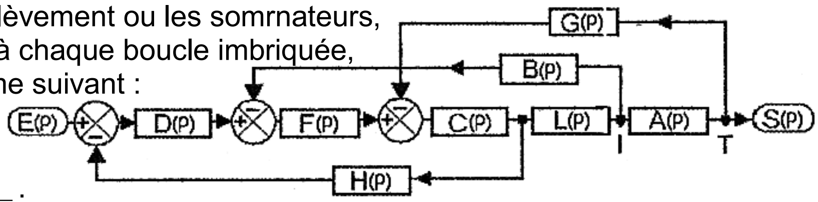
Cette nouvelle fonction de transfert s'associe avec Y(p) pour donner : $H2(p) = \dfrac{H(p).F(p)}{1 + H(p).F(p).G(p)} + Y(p)$



Attention, Y(p) n'est pas dans une boucle de retour, mais dans une boucle additionnelle.

App2 (avec correction) :

En déplaçant les blocs, les points de prélèvement ou les somrnateurs, et en appliquant la formule de la F.T.B.F.à chaque boucle imbriquée, **déterminez** la F.T.B.F. globale du système suivant :



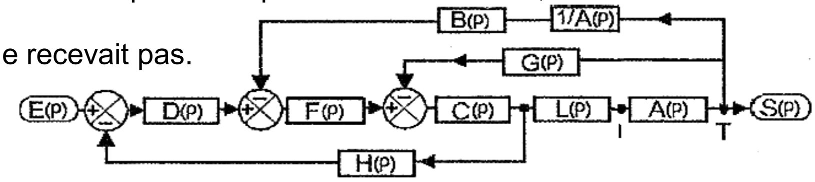
Résolution App2:

La boucle du bloc B passant au point I empêche d'appliquer la formule $\dfrac{H(p)}{1+H(p).G(p)}$.

Déplacez le point de prélèvement pour le mettre au point T et pour aérer le schéma, placez la FT au-dessus de G(P).

Dans ce cas le bloc B(p) reçoit A(p) qu'il ne recevait pas.

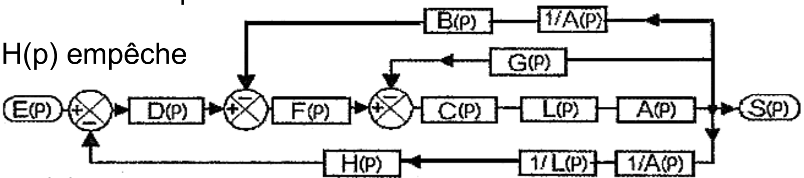
Pour éviter d'affecter le système, placez un bloc $\dfrac{1}{A(p)}$ à côté du bloc B(p).



Ainsi le produit $A(p).\dfrac{1}{A(p)} = 1$ ramène le système à l'identique.

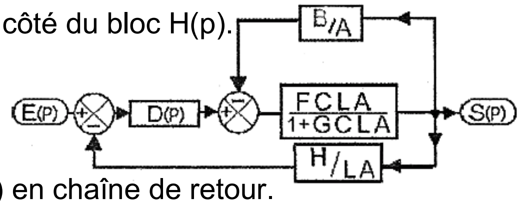
Pour les mêmes raisons, la boucle du bloc H(p) empêche l'utilisation de la formule de la FTBF.

Déplacez le point de prélèvement pour le mettre au point T.



Dans ce cas le bloc H(p) va recevoir L(p) et A(p) qu'il ne recevait pas.

Pour éviter d'affecter le système, placez un bloc $\dfrac{1}{A(p)}$ et $\dfrac{1}{L(p)}$ à côté du bloc H(p).

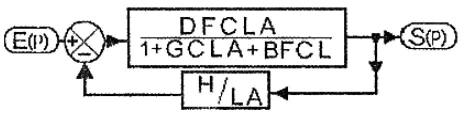


Ainsi le système est identique.

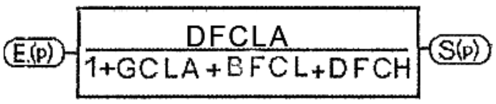
Le système est prêt pour remplacer les boucles imbriquées en appliquant la formule de la FTBF. Réduisez la boucle la plus imbriquée, composée de C(p).L(p).A(p) en chaîne directe et G(p) en chaîne de retour.

Entrez ensuite F(p) qui se trouve en série du bloc obtenu.

La réduction de la deuxième boucle imbriquée suit la même loi, la même formule.

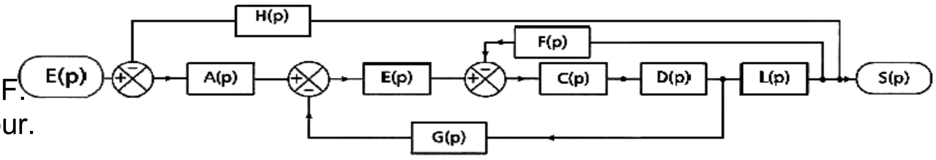


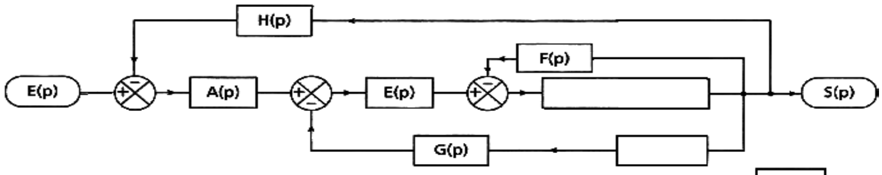
Réduisez la dernière boucle imbriquée pour obtenir

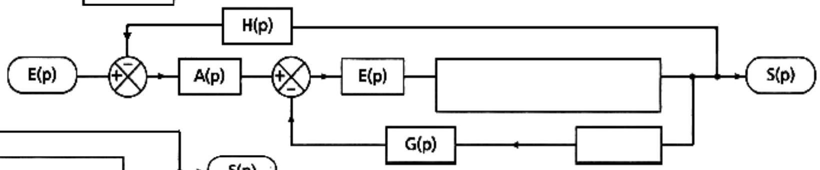


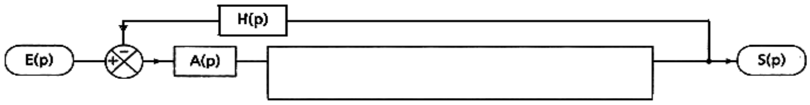
FONCTION TRAITER L'INFORMATION : Aspect Fonctionnel ; Physique ; Technologique

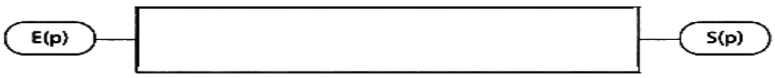
App3 (sans réponse) :
À partir du schéma-bloc suivant, **donnez** l'expression de la F.T.B.F. en absorbant les boucles de retour.



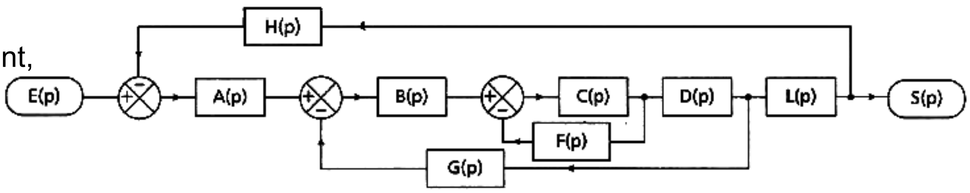






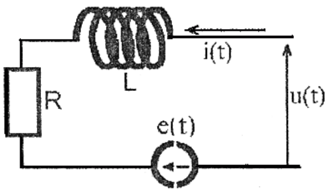


App4 (sans réponse) :
À partir du schéma-bloc suivant, **donnez** l'expression de la F.T.B.F. en absorbant les boucles de retour.



App5 (avec correction) : Schéma-bloc de la FT d'un moteur à courant continu :
Schéma électrique simplifié d'un moteur à courant continu.
Il est géré par les quatre équations suivantes :

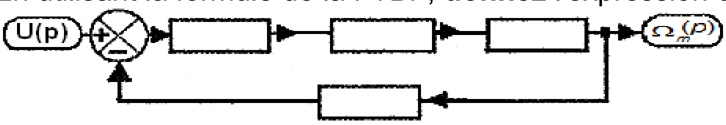
(1)	$u(t) = R \cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + e(t)$	Équation électrique définie d'après le schéma (équation électrique de l'induit)
(2)	$C_m = K_i.i(t)$	Équation propre au moteur à courant (équation donnant la constante de couple K_i)
(3)	$C_m - f \cdot \omega(t) = J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt}$	Équation propre au PFD (équation mécanique sur l'arbre moteur)
(4)	$e(t) = K_e \cdot \omega(t)$	Équation propre au moteur à courant continu (équation donnant la constante de f.e.m)



Appliquez à ces 4 équations, les théorèmes des transformées de Laplace

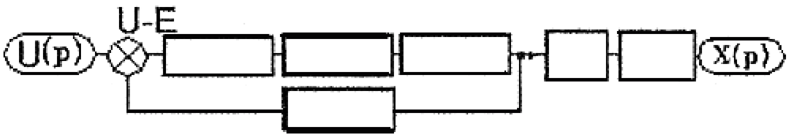
(1)	$u(t) = R \cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + e(t)$	$\xrightarrow{L}$	$U(p) - E(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p)$	$H_1(p) = \dfrac{I(p)}{U(p) - E(p)} = \dfrac{1}{R + L \cdot p}$
(2)	$C_m = K_i.i(t)$	$\xrightarrow{L}$	$C_m(p) = K_i.I(p)$	$H_2(p) = \dfrac{C_m(p)}{I(p)} = K_i$
(3)	$C_m - f \cdot \omega(t) = J \cdot \dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$\xrightarrow{L}$	$C_m(p) - f \cdot \Omega(p) = J \cdot p \cdot \Omega(p)$	$H_3(p) = \dfrac{\Omega(p)}{C_m(p)} = \dfrac{1}{f + J \cdot p}$
(4)	$e(t) = K_e \cdot \omega(t)$	$\xrightarrow{L}$	$E(p) = K_e \cdot \Omega(p)$	$H_4(p) = \dfrac{E(p)}{\Omega(p)} = K_e$

A partir de ces quatre fonctions transfert, remplissez le schéma-bloc suivant.
En utilisant la formule de la FTBF, **donnez** l'expression de la fonction de transfert H(p) globale.

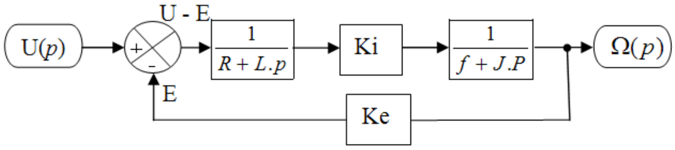


et

Remplissez le schéma-bloc suivant, qui permet de passer de U(p) à X(p), sachant que le moteur fait tourner une vis de pas p, pour faire avancer un chariot d'une distance x(t).



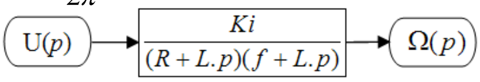
Corrigé App5 :



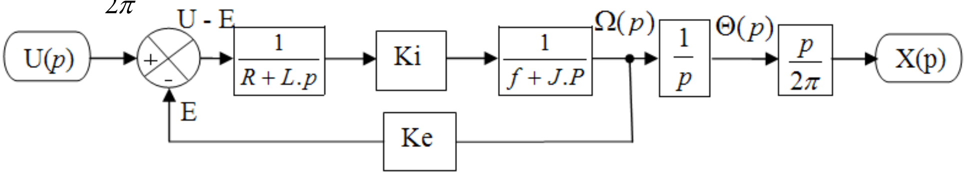
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \rightarrow p \cdot \Theta(p) = \Omega(p)$$

donc la $FTBF = \dfrac{\Theta(p)}{\Omega(p)} = \dfrac{1}{p}$ La translation x(t) d'une vis est proportionnelle à la rotation $x(t) = k \cdot \theta(t)$.

Après une rotation d'un tour, la vis avance d'un pas : $pas = k \cdot 2\pi \rightarrow x(t) = \dfrac{pas}{2\pi} \cdot \theta(t)$



Dans le domaine de Laplace : $X(p) = \dfrac{pas}{2\pi} \cdot \Theta(p)$

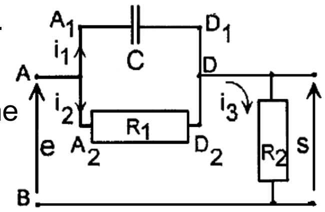


App6 (avec correction) : **Circuit R-C**

Dans le schéma-bloc suivant vous aurez à réfléchir avant d'appliquer la formule $\dfrac{H(p)}{1 + G(p) \cdot H(p)}$.

En effet, un sous-ensemble de ce schéma-bloc est en parallèle et non en série. Il faut sommer les fonctions transfert et non pas les composer.

Le problème **consiste à déterminer** la fonction transfert $\dfrac{S(p)}{E(p)}$ dans le domaine de Laplace, à partir du schéma électrique suivant :



Corrigé App6 :

1	$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$	L	$I_3(p) = I_1(p) + I_2(p)$
2	$\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1.dt - R_1.i_2(t) = 0$	L	$\dfrac{I_1(p)}{C \cdot p} - R_1.I_2(p) = 0$
3	$\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1.dt + R_2.\{i_1(t) + i_2(t)\} = e(t)$	L	$\dfrac{I_1(p)}{C \cdot p} + R_2.\{I_1(p) + I_2(p)\} - E(p) = 0$
4	$s(t) = R_2.\{i_1(t) + i_2(t)\}$	L	$S(p) = R_2.\{I_1(p) + I_2(p)\}$

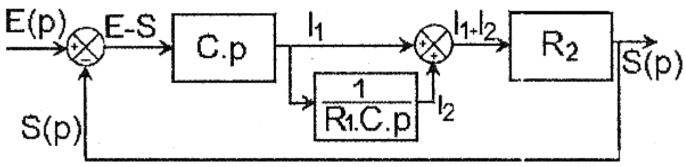
La sortie S(p) de l'équation (4) reportée dans l'équation (3) permet d'écrire $\dfrac{I_1(p)}{C \cdot p} = E(p) - S(p)$

ce qui correspond à l'opération exécutée par le sommateur d'entrée. E(p) est l'entrée et S(p) la sortie qui revient au sommateur d'entrée par un retour unitaire. Ainsi la première fonction transfert du schéma-bloc est : $H_1(p) = \dfrac{I_1(p)}{E(p) - S(p)} = C.p$ où $I_1(p)$ sort du premier bloc.

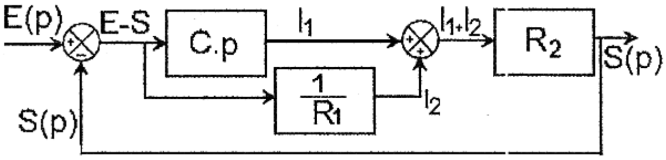
Cherchez une FT dont $I_1(p)$ est l'entrée, suivie d'une sortie. L'équation (2) convient et permet d'écrire

$$I_2(p) = \frac{I_1(p)}{R_1 \cdot C \cdot p} \Longrightarrow I_1(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{R_1 \cdot C \cdot p}} \rightarrow I_2(p) \Longrightarrow \frac{I_2(p)}{I_1(p)} = \frac{1}{R_1 \cdot C \cdot p}$$

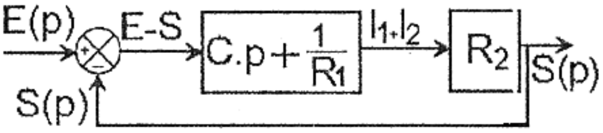
La sortie du bloc est I_2(p). Cherchez une FT dont I_2(p) est l'entrée :. L'équation (1) convient, car aucune autre n'est utilisable dans la situation actuelle. $I_3(p) = I_1(p) + I_2(p)$ est réalisé par un sommateur.
Ensuite, connaissant $I_1(p) + I_2(p)$, déterminez $S(p) = F_2.\{ I_1(p) + I_2(p) \}$.
Le schéma-bloc final est le suivant :



Pour déterminer la FTBF de ce système on ne peut pas utiliser la formule $\dfrac{H(p)}{1+G(p)\cdot H(p)}$ car le bloc de la boucle intérieure doit être d'abord sommé. Il faut déplacer un point de prélèvement pour associer le bloc C.p avec le bloc $\dfrac{1}{R_1\cdot C\cdot p}$.



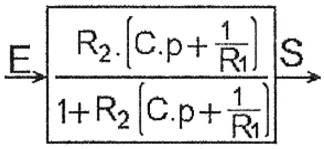
Déplacer le point de prélèvement avant C.p, oblige à réaliser le produit $\dfrac{1}{R_1\cdot C\cdot p}\cdot C.p=\dfrac{1}{R_1}$



Ajoutez d'abord les fonctions transfert de chaque bloc C.p et $\dfrac{1}{R_1}$. Multipliez les deux fonctions transfert en série.

Il reste une boucle à retour unitaire.

La fonction transfert finale globale est :



V- CARACTÉRISTIQUES ÉQUIVALENTES D'UN SYSTÈME RAPPORTÉES A L'ARBRE MOTEUR :

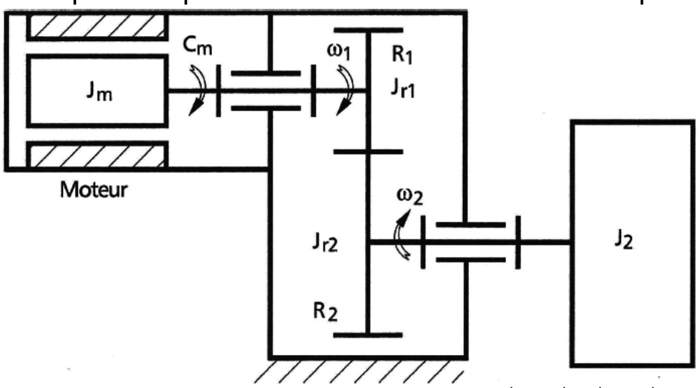
Dans un système de transmission par engrenages, on désire connaître l'influence sur l'arbre moteur **(1)** des frottements visqueux, des couples résistants à sec et de l'inertie des arbres entraînés par la partie motrice.

A- Inertie équivalente rapportée à l'arbre moteur :

On considère J_m l'inertie du rotor du moteur, et J_{r1}, l'inertie de la partie du réducteur située sur l'arbre moteur.

On prend en compte J_{r2}, l'inertie du réducteur située sur l'arbre récepteur, et J_2, l'inertie du récepteur, indépendante du réducteur.

Pour mettre en évidence les effets d'inertie, on ne tient pas compte du coefficient de frottement visqueux ni des couples résistants à sec.



Méthode

On cherche à déterminer l'inertie équivalente rapportée à l'arbre moteur.

La démonstration s'appuie sur le théorème du moment cinétique appliqué aux systèmes tournant autour d'un axe fixe : $\sum Mt_{/\Delta}=J.\dfrac{d\omega}{dt}$

où Δ est l'axe de rotation de l'arbre considéré.

Écrire l'équation appliquée à l'arbre moteur :

$C_m(t)-F.R_1=(J_m+J_{r1}).\dfrac{d\omega_1}{dt}$; F : force tangente de contact entre les pignons (1) et (2) : $|F_{1/2}|=|F_{2/1}|=F$

Écrire l'équation appliquée à l'arbre récepteur : $F.R_2=(J_2+J_{r2}).\dfrac{d\omega_2}{dt}$

Écrire le rapport de réduction entre les deux pignons : $|k|=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{\omega_2'}{\omega_1'}$

La résolution de ce système d'équations permet le calcul de Cm en fonction de toutes les inerties :

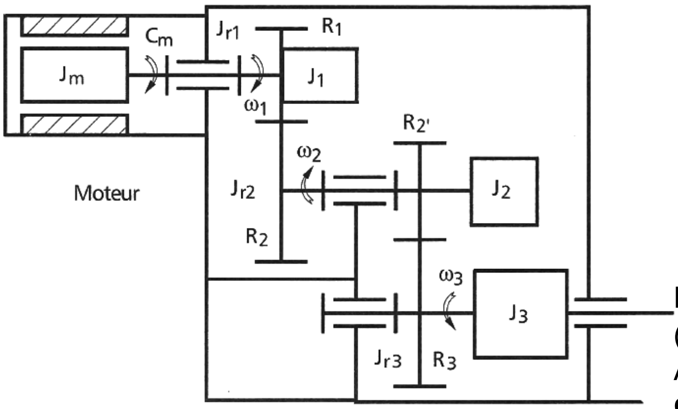
$$C_m(t)=\left[J_m+J_{r1}+k^2(J_{r2}+J_2)\right].\frac{d\omega_1}{dt}$$

La quantité $J_m+J_{r1}+k^2(J_{r2}+J_2)$ est l'inertie équivalente rapportée à l'arbre moteur.

App7 (avec correction) :

Le système donné comporte un arbre moteur (1), un arbre auxiliaire (2) et un arbre récepteur (3).
Soit $C_m(t)$ le couple moteur. On tient compte des inerties suivantes :

- inertie sur l'arbre (1) : J_m, J_{r1}, J_1 ;
- inertie sur l'arbre intermédiaire (2) : J_{r2}, J_2 ;
- inertie sur l'arbre récepteur (3) : J_{r3}, J_3.



Déterminez l'inertie équivalente du système complet, rapportée à l'arbre moteur. **Écrire** les équations des moments, appliquées aux arbres (1), (2) et (3).

F : est la force tangente de contact entre les pignons (1) et (2) : $\left\|\overrightarrow{F_{1/2}}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_{2/1}}\right\| = F$

T : est la force tangente de contact entre les pignons (2') et(3) : $\left\|\overrightarrow{T_{2/3}}\right\| = \left\|\overrightarrow{T_{3/2}}\right\| = T$

Écrire les rapports de réduction k entre les pignons (2) et (1) et λ entre les pignons (3) et (2').
À partir du système d'équations obtenu, **déterminez** l'expression de $C_m(t)$.

Réponse App7 :

$$C_m(t) = \left[J_m + J_{r1} + J_1 + k^2(J_{r2} + J_2) + k^2.\lambda(J_{r3} + J_3)\right].\frac{d\omega_1}{dt}$$

La quantité $\left[J_m + J_{r1} + J_1 + k^2(J_{r2} + J_2) + k^2.\lambda(J_{r3} + J_3)\right]$ est l'inertie équivalente rapportée à l'arbre 1.

B- Inertie particulière :

Lors du démarrage d'un véhicule, la masse de celui-ci intervient sur l'axe des roues.
Il s'agit alors de déterminer l'inertie de masse appliquée sur l'axe des roues du véhicule.
Soit un véhicule de masse 4M, subissant une accélération (a = $\gamma = \Gamma$), se déplaçant à vitesse linéaire V(t) et dont les roues tournent à vitesse angulaire ω(t).
On fait l'hypothèse que chaque roue supporte la même charge, soit P = M.g.

Méthode

Par application de la **loi fondamentale de la dynamique**, la force d'entraînement d'une des roues motrices sur le châssis est égale à **F = M.a**.

La vitesse linéaire V(t) = R.ω(t) implique l'accélération linéaire a = R. $\frac{d\omega}{dt}$

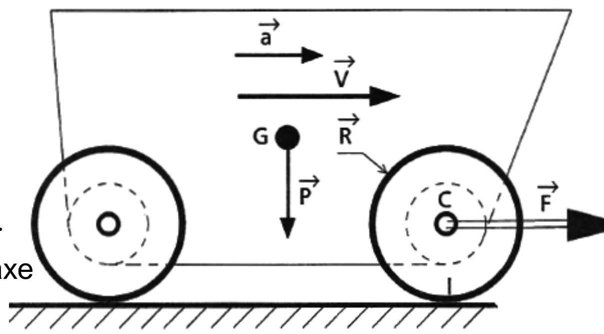
Soit I le point de contact de la roue sur le sol. Le moment de cette force par rapport CIR (I) est égal à

$$Mt_{/I} = F.R = M.\Gamma.R = M.R.\frac{d\omega}{dt}.R = M.R^2.\frac{d\omega}{dt}$$

Le **théorème du moment cinétique** a pour équation :

$\sum Mt_{/\Delta} = J_e.\frac{d\omega}{dt}$ où J_e est l'inertie équivalente.

Par égalité des deux équations on détermine $J_e = M.R^2$.



L'inertie J_e s'ajoute à l'inertie J_p propre à la masse de l'axe et des roues et subit la même transformation pour se rapporter à l'axe moteur. J_p dépend du rayon et de la masse des roues, alors que J_e dépend de la masse du véhicule entraîné par les roues.

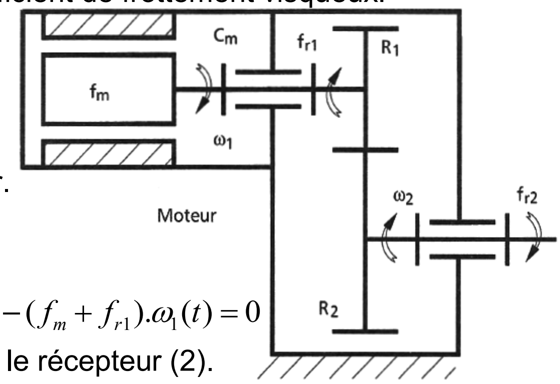
C- Coefficient de frottement visqueux rapporté à l'arbre moteur :

On désire connaître l'influence du coefficient de frottement visqueux d'un arbre récepteur (2) sur l'arbre moteur (1). Le couple de frottement visqueux est donné par la formule $C_f = f.\omega(t)$ où f est le coefficient de frottement visqueux et $\omega(t)$ la vitesse de rotation de l'arbre considéré.

Dans cet exercice, on ne tient compte que des effets du coefficient de frottement visqueux.

On utilise le théorème du moment cinétique

$\sum Mt_{/\Delta} = J.\frac{d\omega}{dt}$ ou $J = 0$ puisque l'inertie n'est pas prise en compte.



f_m est le coefficient de frottement visqueux sur l'arbre moteur.

f_{r1} est le coefficient de frottement visqueux du réducteur sur l'arbre moteur (1).

L'équation (Eq1) sur l'arbre moteur s'écrit alors : $C_m(t) - F.R - (f_m + f_{r1}).\omega_1(t) = 0$

f_{r2} est le coefficient de frottement visqueux du réducteur sur le récepteur (2).

L'équation (Eq2) sur l'arbre récepteur s'écrit alors : $F.R_2 - f_{r2}.\omega_2(t) = 0$.

Le rapport de réduction entre les pignons (1) et (2) est $|k| = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

La résolution du système d'équations permet de déterminer C_m : $C_m(t) = (f_m + f_{r1} + k^2.f_{r2}).\omega_1(t)$

La quantité $(f_m + f_{r1} + k^2.f_{r2})$ est le coefficient de frottement visqueux équivalent rapporté à l'arbre 1

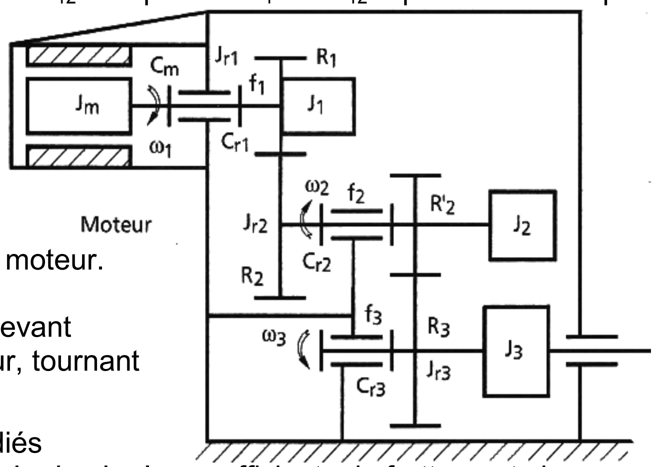
Cette expression correspond à la valeur minimale du couple moteur nécessaire pour vaincre les frottements visqueux du système.

D- Couple résistant ramené à l'arbre moteur :

Dans un système de transmission par engrenages, on peut connaître l'influence du couple résistant à sec d'un arbre récepteur (2) sur l'arbre moteur (1) en appliquant le même théorème. La résolution du système d'équations permet de déterminer $C_m(t) = C_r + k.C_{r2}$. La quantité $C_r + k.C_{r2}$ représente le couple résistant équivalent rapporté à l'arbre moteur.

E- Généralisation :

Si un système est composé de plusieurs arbres récepteurs ou non, chacun lié directement ou non à l'arbre moteur par des engrenages, la loi de superposition des états permet, à partir des résultats précédents, de déterminer les caractéristiques équivalentes du système complet, rapportées à l'arbre moteur.



App8 (avec correction) :

Un réducteur de vitesse comporte un arbre moteur recevant le couple $C_m(t)$, un arbre auxiliaire et un arbre récepteur, tournant chacun à vitesse angulaire $\omega_m(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$.

Dans cet exercice interviennent les trois éléments étudiés précédemment, c'est-à-dire : les inerties, J_m J_{r1}, J_1, J_{r2}, J_2, J_{r3}, J_3 ; les coefficients de frottement visqueux : f_1, f_2, f_3 ; les couples résistants à sec : C_{r1}, C_{r2}, C_{r3}. Ces éléments sont définis sur chaque arbre.

On exprime les rapports de réduction $|k|$ entre les arbres (2) et (1) et $|\lambda|$ entre les arbres (3) et (2).

1- Déterminez le couple moteur $C_m(t)$ en fonction de $\omega_m(t)$ et des éléments définis précédemment.

2- Déduisez-en l'expression de la partie équivalente de toutes les perturbations résistantes.

3- Donnez l'expression de C(p) en fonction de Ω_m (p) dans le domaine symbolique de Laplace.

➻Réponse App8 : Les moments d'inertie usuelle voir cours de la dynamique

$$C_m(p) = C_{r1} + k.C_2 + k.\lambda.C_{r3} + \left\{\left[(J_m + J_{r1} + J_1) + k^2(J_{r2} + J_2) + k^2\lambda^2(J_{r3} + J_3\right]p + (f_1 + k^2 f_2 + k^2\lambda^2 f_3)\right\}\Omega_m(p)$$

Formulaire **Dynamique - Statique**

Force de pesanteur	P = M.g
Loi fondamentales - Somme de forces extérieures sur un système S : - Somme des moments des forces extérieures sur un système S	$\sum \overrightarrow{F_{ext/S}} = M \cdot \vec{a}$ et $\sum \mathfrak{M}\overrightarrow{F_{ext/S}} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$
En posant a = 0 et $\dot{\omega}$ = 0, on obtient les lois fondamentales de la statique.	$\sum \overrightarrow{F_{ext/S}} = \vec{0}$ et $\sum \mathfrak{M}\overrightarrow{F_{ext/S}} = \vec{0}$
- Ressort de compression ou d'extension : la force dans un ressort est proportionnelle à la longueur comprimée du ressort. (Le sens dépend du type de ressort et du repère choisi).	$F_r = k.(L_f - L_i)$ K : coefficient de raideur en (N/m)
- Ressort à spirale : le couple est proportionnel à l'angle de rotation.	$C_r = k.\theta$; θ : angle de rotation en (rad)
- Couple de frottement visqueux (rotation) : Il s'oppose toujours au déplacement du système isolé. Il est donc négatif si le sens du mouvement est positif.	$C_f = \nu.\omega(t)$; ν : coefficient de frottement visqueux mécanique en $\left(\frac{N.m}{rad/s}\right)$
- Force de frottement visqueux (translation) : Elle s'oppose toujours au déplacement du système isolé. Elle est donc négative si le sens du mouvement est positif.	$F = f.V(t)$; f : coefficient de frottement visqueux mécanique en (kg/s)
Rapport de réduction (engrenage)	$\lvert r \rvert = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{d_A}{d_B} = \eta \cdot \frac{C_A}{C_B}$

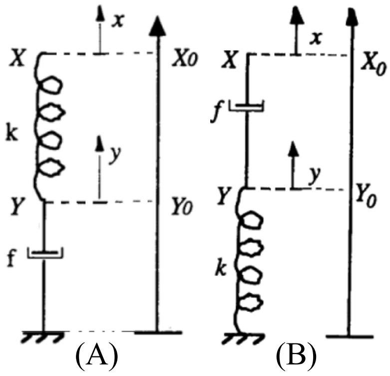
Formulaire **Électricité** (toujours préciser le sens de i(t) et e(t)

Inductance L en (H), (e(t) et i(t) de même sens)	$e(t) = L \cdot \frac{di(t)}{d(t)} = f \cdot e \cdot m$
Résistance R en (Ω) :	$U(t) = R \cdot i(t)$
Loi d'Ohm généralisée :	$U(t) = r \cdot i(t) - \sum e(t)$
Capacité C en (F) :	$i(t) = C \cdot \frac{dU(t)}{dt} \Rightarrow U(t) = \frac{1}{C}\int i(t) \cdot dt$
Moteur électrique à courant continu - couple moteur électromécanique C_m en (N.m) - Constante de couple K_c en (Nm/A) - Constante de force électromotrice Ke	$C_m = K_c \cdot i(t)$ et $e(t) = K_e \cdot \omega(t)$ $\omega = \frac{2\pi \cdot N}{60} = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ {f en (Hz) ; T en (s)}
Théorème du moment cinétique appliqué à un arbre moteur : - Moteur à vide [J_m : inertie moteur (kg.m²); Cm : couple moteur (Nm) ; Cf : couple de frottement (Nm)]	$J_m \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - K_d \cdot \omega(t) - C_f$

App9 : Système mécanique 1 (avec correction) :

Soit un système mécanique constitué d'un ressort et d'un amortisseur.
On se propose d'étudier les 2 cas suivants
A l'instant initial, on suppose que le système est en équilibre :
- Le point X est en X_0, le point Y en Y_0.

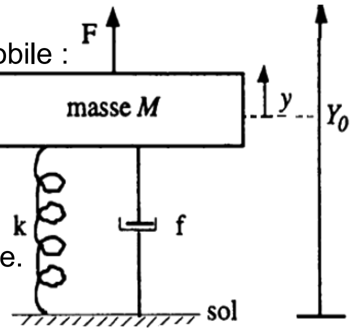
L'extrémité X peut se déplacer : c'est l'entrée du système.
On notera : $x(t)$: la variation de position de X autour de sa position initiale ;
$y(t)$: la variation de position de Y autour de sa position initiale ;
f : le coefficient de frottement visqueux dans l'amortisseur.
On supposera que l'effort d'amortissement est proportinnel à la vitesse de déplacement du piston par rapport au cylindre.



Pour chaque cas étudié successivement :
1- **Établir** l'équation différentielle qui régit l'équilibre du système ? **De quel** type s'agit-il ?
2- **Établir** la fonction de transfert H(p) = Y(p) / X(p) ? **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?
3- **Établir** le schéma fonctionnel correspondant ?
4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **déterminer** alors le signal de sortie y(t) ?
On posera $\tau = f / k$

App10 : Système mécanique 2 (avec correction) :

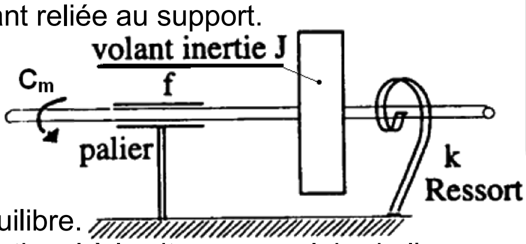
Soit le système masse-ressort-amortisseur suivat qui schématise le comportement simplifié d'une partie d'une susponsion d'un véhicule automobile :
A l'instant initial, on suppose que le système est en équilibre :
Le centre de gravité de la masse M est en Y_0 tel que $k.Y_0 = M.g$
On note : $y(t)$: la variation de position de Y autour de sa position initiale ;
k : la raideur du ressort ;
f : le coefficient de frottement visqueux dans l'amortisseur.
On applique une variation de force F(t) sur la masse : c'est l'entrée du système.



1- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, **établir** l'équation différentielle qui relie les différents paramètres du système ?
De quel type s'agit-il ?
2- **Établir** la fonction de transfert H(p) = Y(p) / F(p) ?
On posera : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ et $\dfrac{f}{M} = 2\xi\omega_0$; **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?
3- **Établir** le schéma fonctionnel correspondant ?
4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **déterminer** alors le signal de sortie y(t) ?
Étudier tous les cas possibles. On pourra poser : $\omega = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

App11 : Système mécanique 3 (avec correction) :

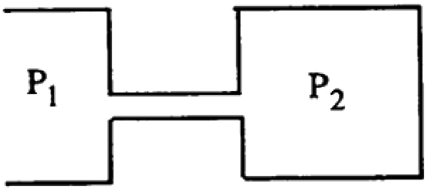
On concsidère un axe monté dans un palier. Sur cet axe monté un volant d'inertie.
Un ressort de torsion a une extrémité attachée à l'axe, l'autre étant reliée au support.
On note :
k : la raideur en torsion du ressort ;
f : le coefficient de frottement au niveau du palier ;
J : le momentd'inertie du volant par rapport à l'axe ;
C_m : le couple appliqué sur l'axe : c'est l'entrée du système ;
Θ : la variation de la position angulaire autour de la position d'équilibre.



On admettra que le couple de frottement dans le palier est proportinnel à la vitesse angulairede l'axe.
1- En appliquant le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation, **établir** l'équation différentielle qui régit le système ? **De quel** type s'agit-il ?
2- **Établir** la fonction de transfert H(p) = Θ(p) / C_m(p) ?
On posera : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{J}}$ et $\dfrac{f}{J} = 2\xi\omega_0$; **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?
3- **Établir** le schéma fonctionnel correspondant ?
4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **déterminer** alors le signal de sortie θ(t) ?

App12 : Système pneumatique (avec correction) :

Soit le système constitué de 2 enceintes dans lesquelles les pressions d'air sont respectivement P_1 et P_2. On notera P1 et P2 les variations de pression autour d'un équilibre.



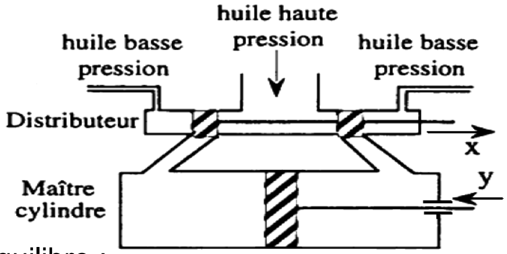
1- En suposant que le débit (k) dans le conduit reliant les 2 enceintes est proportinnel (k) à la différence de pression, **établir** l'équation différentielle qui régit l'équilibre du système ? **De quel** type s'agit-il ?

2- Établir la fonction de transfert $H(p) = P_2(p) / P_1(p)$?
On posera : $\tau = 1 / k$; **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?

3- Établir le schéma fonctionnel correspondant ?

4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **détermine**r alors le signal de sortie $P_2(t)$?

App13 : Système hydraulique (avec correction) :



Soit le système amplificateur de forces suivant :
Il est constitué :
- d'un distributeur de section S_D (entrée)
- d'un maitre-cylindre de section S_C ($S_C >> S_D$)

On néglige les frottements et les inrties.
On notera :
x(t) : le mouvement du piston du distributeur autour d'un point d'équilibre ;
y(t) : le mouvement du piston du maitre-cylindre.

1- En suposant que le débit d'huile entre les 2 cylindres est proportionnel au déplacement du piston du disributeur, **établir** l'équation différentielle qui régit le système ? **De quel** type s'agit-il ?

2- Établir la fonction de transfert $H(p) = Y(p) / X(p)$? **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?

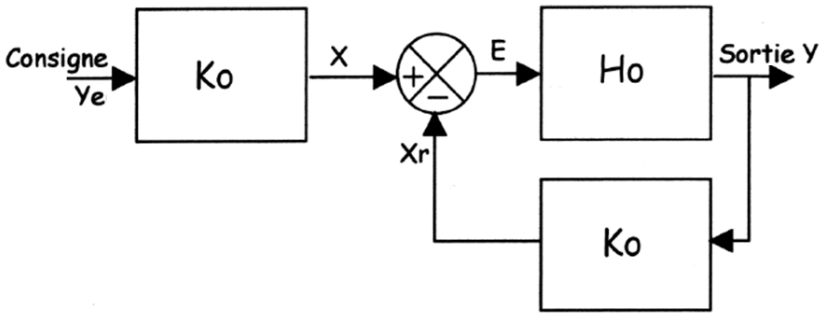
3- Établir le schéma fonctionnel correspondant ?

4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **déterminer** alors le signal de sortie y(t) ?

App14 (avec correction) : Système asservi en régime continu

Comprendre le fonctionnement d'un système asservi

Un système asservi peut être représenté en régime statique par le schéma fonctionnel suivant :



On donne les transmittances de la chaîne directe H_0 = 1800 et de la chaîne de retour K_0 = 0,1.

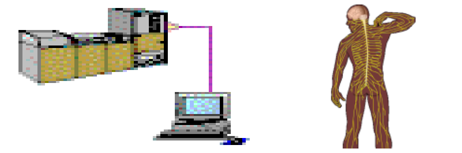
1- Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la transmittance de boucle $T = Xr / E$.

2- Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la transmittance en boucle fermée $T' = Y / Ye$.

3- Pour une consigne Ye = 10, donner les expressions littérales puis **calculer** les valeurs de X, Xr, E et Y.

4- Donner l'expression littérale puis calculer l'erreur absolue $\varepsilon = Y - Ye$ de cet asservissement et son erreur relative er à une entrée constante.

5- Si on fait passer la transmittance de la chaîne directe à H_0 = 3600, **que deviennent** les erreurs absolues et relatives ?
Comment faut-il choisir la valeur de H_0 pour avoir une erreur la plus faible possible ?



App15 (avec correction) : Le principe de la régulation de vitesse

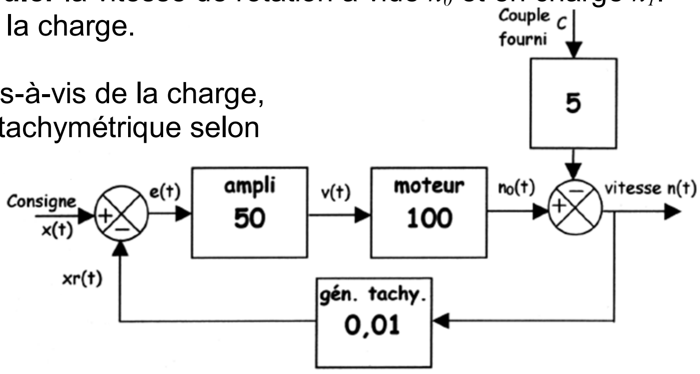
Comprendre le fonctionnement d'un système asservi

La vitesse de rotation n (tr/mn) d'un moteur est liée à sa tension d'alimentation v et au couple C (Nm) qu'il fournit par la relation : $n = 100.v - 5.C$

Le moteur est dit « à vide » s'il ne fournit aucun couple, et « en charge » lorsqu'il fournit un couple de $C = 10\ Nm$.

1- Pour une tension d'alimentation de $v = 10V$, **calculer** la vitesse de rotation à vide n_0 et en charge n_1. **En déduire** la variation relative de vitesse due à la charge.

Pour améliorer le comportement de ce moteur vis-à-vis de la charge, on asservit sa vitesse à l'aide d'une génératrice tachymétrique selon le schéma fonctionnel suivant :



2- Retrouver sur ce schéma fonctionnel les blocs qui traduisent l'équation précédente décrivant le moteur.

3- Le moteur n'est pas chargé ($C = 0$). **Établir** la relation entre n et x et en déduire la valeur de la consigne x_0 qui donne une vitesse de rotation de $n_0 = 1000\ tr/mn$.

4- Établir la relation entre la sortie n, la consigne x et le couple fourni C.

5- Pour la valeur de consigne x_0 **calculée** précédemment, calculer la nouvelle valeur n_2 de la vitesse en charge et en **déduire** la nouvelle variation relative de vitesse.

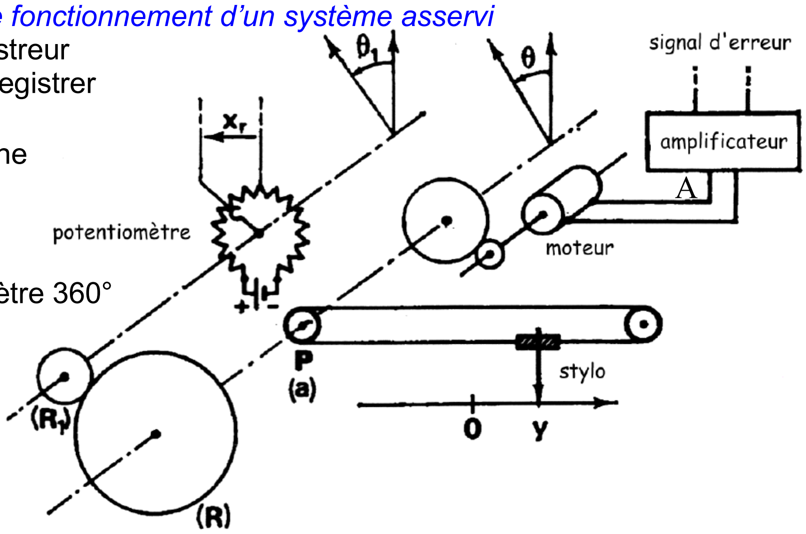
6- Conclure quant à l'efficacité de la solution mise en oeuvre. **Comment pourrait-on** encore améliorer la régulation de vitesse ?

App16 (avec correction) : Modélisation d'un asservissement de position

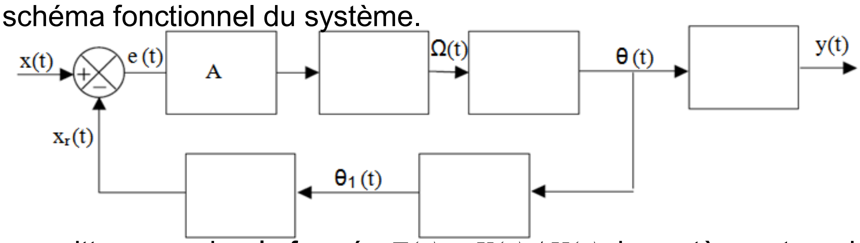
Comprendre le fonctionnement d'un système asservi

La position y (en mm) du stylo d'un enregistreur est asservie à la tension électrique x à enregistrer au moyen du dispositif suivant :

- Le moteur muni de son réducteur entraîne une poulie P de rayon a = 10 mm
- La rotation de la poulie P entraîne une courroie qui déplace le stylo
- Le capteur de position est un potentiomètre 360° alimenté en 30V
- Le potentiomètre est entraîné par engrenage dont le rapport des rayons vaut $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{\pi}{5} = 0,6283$
- Le moteur a une transmittance statique de 10 et une constante de temps de 0,2 s

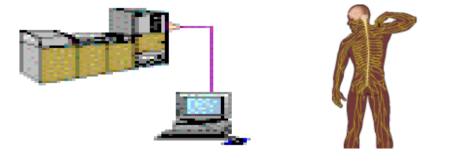


1- Compléter le schéma fonctionnel du système.



2- Exprimer la transmittance en boule fermée $T(p) = Y(p) / X(p)$ du système et en déduire la valeur de l'excursion de y en régime permanent, si la tension d'entrée x varie entre –15V et +15V.

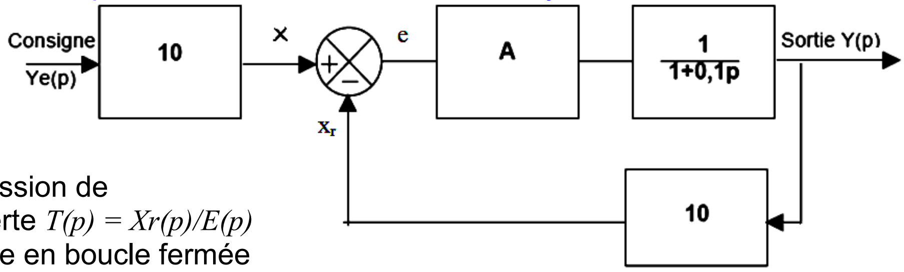
3- Monter que toute se passe comme si on avait capté directement y avec une chaine de réaction dont on **calculera** la fonction de transfert $K = x_r / y$



App17 (avec correction) : Réponse d'un système asservi du 1er ordre

Prévoir le comportement en boucle fermée d'un système asservi

On étudie le système bouclé suivant, dans lequel A est un coefficient d'amplification réglable :

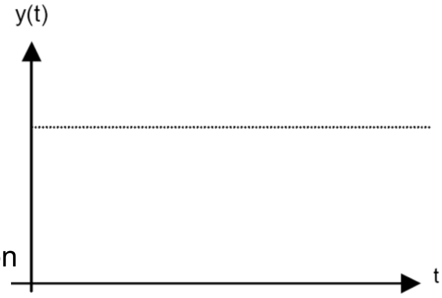


1- Donner en fonction de A l'expression de sa transmittance en boucle ouverte $T(p) = Xr(p)/E(p)$

2- Calculer ensuite la transmittance en boucle fermée $T'(p) = Y(p)/Ye(p)$ en fonction de l'amplification A

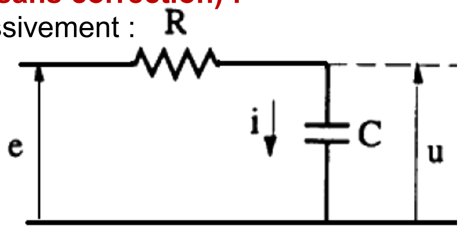
3- On règle l'amplification à A_0 =50. Calculer alors la valeur de la transmittance statique du système bouclé.
Quelle est la valeur de la sortie pour une entrée Ye = 2 ?
Quelle est l'erreur sur la sortie pour cette entrée ?
Exprimer cette erreur en %.

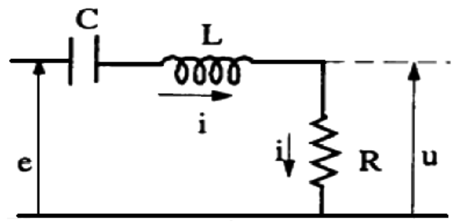
4- Tracer pour cette valeur d'amplification A_0 la réponse du système bouclé à un échelon unitaire en précisant bien la valeur et la position du temps de réponse à 5% du système.



App18 : Système électrique (sans correction) :

Pour chaque cas étudié successivement :





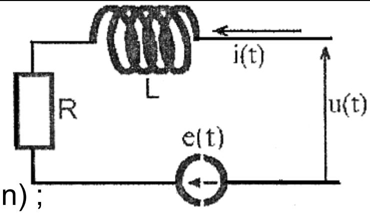
1- A l'instant initial, le condensateur n'est pas chargé et il n'existe aucun courant dans la self.
Établir l'équation différentielle qui régit le système ? **De quel** type s'agit-il ?

2- Établir la fonction de transfert H(p) = U(p) / E(p) ?
on posera T1 = R.C et T2 = L.C. **Quelle**(s) remarque(s) pouvez-vous faire ?

3- Établir le schéma fonctionnel correspondant ?

4- On envoie un échlon comme signal d'entrée, **déterminer** alors le signal de sortie u(t) ?
Représenter graphiquement le signal de sortie (on se limitera à 3T)
Tracer la tangente à l'origine et l'asymptote.
Dans le 1re cas, préciser les valeurs : u(0) ; u(∞) ; u(T) et u(3T).
Déterminer en porcentage les rapports : u(T) / u(∞) et u(T) / u(∞)

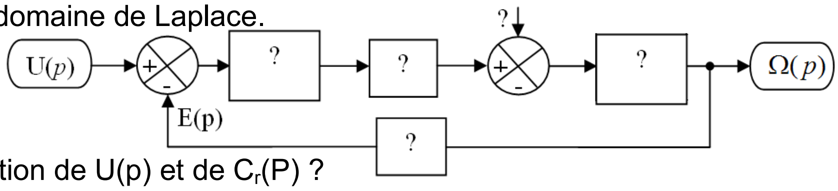
App19 (sans correction) : Moteur électrique à courant continu



Un moteur électrique à courant continu à aimants permanents entraîne un récepteur en rotation. Les conditions initiales sont nulles.
L : inductance du bobinage d'induit du moteur. (L = 1,1 mH) ;
R : résistance du bobinage d'induit du moteur. (R = 1 Ω) ;
K_e : coefficient de tension du moteur $e(t) = K_e.\omega(t)$. (K_e = 12 V pour 3000tr/min) ;
K_i : coefficient de couple du moteur $C_m = K_i.i(t)$. (Ki = $3{,}81.10^{-2}$ Nm/A) ;
J : moment d'inertie de l'ensemble (mteur+réducteur) rapporté à l'axe de rotation du moteur.
(J = $7{,}8.10^{-4}$ m^2.kg) ;
f : coefficient de frottement visqueux mécanique $C_f = f.\ \omega(t)$. (f = 10^{-4} Nms/rad) ;
C_m : couple moteur électromécanique ;
C_r : couple résistant des forces passives (frottement à sec) ;
U(t) : tension aux bornes du moteur ;
ω(t) : vitesse de rotation angulaire de l'arbre moteur.

7.1- Déterminez les équations mécaniques et électriques du système ?
On choisit la situation où le rendement est égale à 1. Ce qui entraîne $K_e = K_i = K$.
a- équation électrique : loi d'Ohm généralisée.
b- équation mécanique : théorème du moment dynamique
On tient compte de deux équations propres au moteur : **$e(t) = K_e.\omega(t)$ et $C_m = K_i.i(t)$**

7.2- transposez ces équations dans le domaine de Laplace.
Chaque FT doit trouver sa place dans le schéma-bloc suivant.
Remplissez chaque bloc.



7.3- Déterminez la fonction Ω(t) en fonction de U(p) et de C_r(P) ?
Définissez la fonction de transfert $\frac{\Omega(p)}{U(p)}$ pour $C_r(p) = 0$ et $\frac{\Omega(p)}{C_r(p)}$ pour $U(p) = 0$.
Réalisez le schéma-bloc correspondant où C_r est l'entrée et $U(p) = 0$.

7.4- Après avoir calculé la FTBO pour $C_r(p) = 0$, **remplissez** le tableau suivant ?

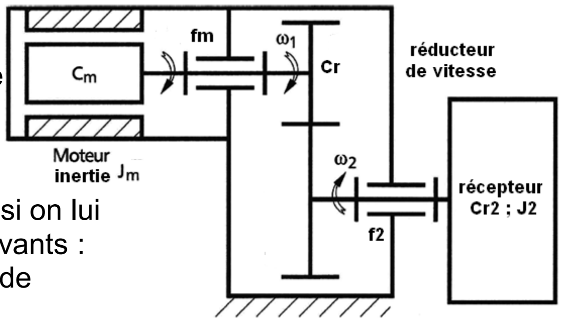
ω0		Pente (0) HdB	
ωc		Pente (∞) HdB	
ξ		φ(0)	
Ω(sommet)		φ (∞)	
H(j ω)maxi		φ (ωc)	

L'inductance d'un moteur électrique à courant continu est toujours très faible au point de la négliger par rapport aux autres valeurs.
Tracez les diagrammes de Bode de la FTBO pour Cr(p)=0 ;
le $1^{ère}$ avec L ≠ 0 ; le $2^{ème}$ avec L = 0

7.5- Étude temporelle du moteur en charge pour $C_r(p) = 0$.
Déterminez la FTBF du moteur avec les valeurs numériques.
Déterminez l'expression de la réponse temporelle ω(t) pour une entrée échelon de tension U = 20 V et **tracez** la courbe.

7.6- Asservissement de position pour une consigne d'entrée U(t).
On choisit de considérer en sortie, l'angle de rotation de l'arbre moteur θ(t).
Quelle fonction transfert faut-il ajouter pour obtenir la nouvelle FTBF : $\frac{\Theta(p)}{U(p)}$

7.7- Inertie équivalente rapportée à l'axe du moteur.
Au démarrage, un moteur doit entraîner sa partie mobile (le rotor) les engrenages et le récepteur placé sur un axe parallèle, comme le montre le dessin ci-contre.
L'inertie de l'ensemble est définie dans un terme nommé ''inertie équivalente''.
Déterminez l'inertie équivalente qu'aurait l'arbre moteur si on lui ajoutait l'inertie de l'arbre récepteur 2 et les éléments suivants :
Arbre 1 : couple moteur C_m, inertie moteur J_m, coefficient de frottement visqueux f_m, couple résistant C_r.
Arbre 2 : inertie moteur J_2, coefficient de frottement visqueux f_2, couple résistant C_{r2}.



Rep. App9 : Système Mécanique 1 (A)

Dans ce système, les éléments étant en série, la force est la même partout à l'équilibre.

Alors : $k(x-y)=f\cdot y' \Rightarrow f\cdot y'+k\cdot y=k\cdot x$

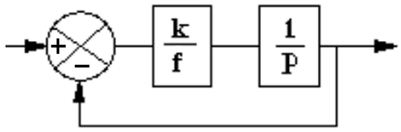
Compte-tenu des conditions initiales, on écrit : $f\cdot p\cdot Y(p)+k\cdot Y(p)=k\cdot X(p)$

La fonction de transfert s'écrit : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{k}{k+f\cdot p}=\dfrac{1}{1+\dfrac{f}{k}\cdot p}$

C'est un système de 1[er] ordre. En identifiant à la forme canonique $H(p)\dfrac{K}{1+\tau\cdot p}$ on en déduit le gain statique $K=1$ et $\tau=\dfrac{f}{k}$

Si l'on écrit la fonction de transfert sous une autre forme : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{k}{k+f\cdot p}=\dfrac{\dfrac{k}{f\cdot p}}{1+\dfrac{k}{f\cdot p}}$ on peut voir que cette forme s'apparente à $FTBF=\dfrac{FTBO}{1+FTBO}$ dans le cas d'un retour unitaire.

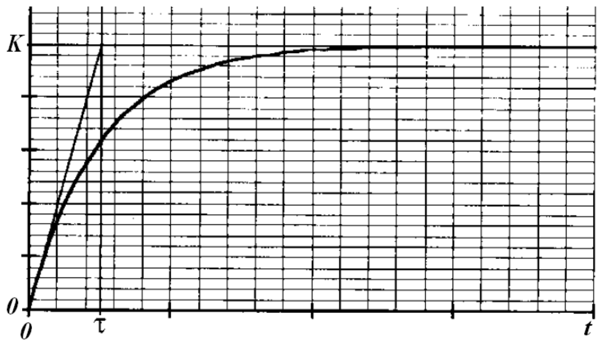
D'où le schéma bloc



Si l'on envoie un échelon, alors, sachant que la réponse canonique s'écrit : $s(t)=K\left[1-e^{\frac{t}{\tau}}\right]\cdot u(t)$

on en déduit $s(t)=K\left[1-e^{\frac{kt}{f}}\right]\cdot u(t)$

Allure classique



Rep. App9 : Système Mécanique 1 (B)

Dans ce système, les éléments étant en série, la force est la même partout à l'équilibre.

Alors : $k(x'-y')=f\cdot y \Rightarrow f\cdot y'+k\cdot y=k\cdot x'$

Compte-tenu des conditions initiales, on écrit : $f\cdot p\cdot Y(p)+k\cdot Y(p)=k\cdot p\cdot X(p)$

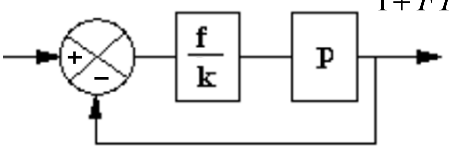
La fonction de transfert s'écrit : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{f\cdot p}{k+f\cdot p}$

C'est un système de 1[er] ordre avec un dérivateur.

Si l'on écrit la fonction de transfert sous une autre forme : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{f\cdot p}{k+f\cdot p}=\dfrac{\dfrac{k}{f}\cdot p}{1+\dfrac{k}{f}\cdot p}$

on peut voir que cette forme s'apparente à $FTBF=\dfrac{FTBO}{1+FTBO}$ dans le cas d'un retour unitaire.

D'où le schéma bloc



Par rapport au système précédent, tout se passe comme si l'on envoyait un Dirac au lieu d'un échelon unitaire

Rep. App10 : Système Mécanique 2

Dans ce système, la masse ne varie pas donc n'intervient pas dans l'étude de la variation.

On écrit : $F(t)-k\cdot y(t)-f\cdot y'(t)=M\cdot y''(t)$

Avec les conditions initiales, cela donne : $H(p)=\dfrac{Y(p)}{F(p)}=\dfrac{1}{k+f\cdot p+M\cdot p^2}=\dfrac{\frac{1}{M}}{\frac{k}{M}+\frac{f}{M}\cdot p+p^2}$

C'est un système du second ordre dont on connaît une forme canonique :

$H(p)=\dfrac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0+\omega_0^2}$ on a ici $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$; $\dfrac{f}{M}=2\xi\omega_0$ et $K=\dfrac{1}{k}$

Pour les courbes, Voir la fiche relative à la réponse indicielle second ordre et la discussion en fonction de la valeur de ξ comparée avec 1.

Pour déterminer le schéma bloc, il faut faire preuve d'un peu d'astuce.

Reprenons l'équation différentielle $F(t)-k\cdot y(t)-f\cdot y'(t)=M\cdot y''(t)$

Dans le domaine de Laplace, on a écrit $F(p)-k\cdot Y(p)-f\cdot p\cdot Y(p)=M\cdot p^2\cdot Y(p)$

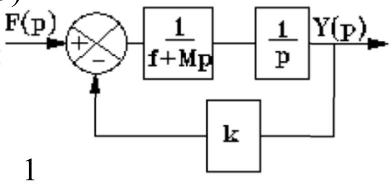
d'où : $F(p)-k\cdot Y(p)=p\cdot\left[f+M\cdot p\right]\cdot Y(p)$

On sait que l'entrée est $F(p)$ et la sortie est $Y(p)$.

On sait qu'à la sortie du comparateur on aura $\varepsilon(p)=F(p)-r(p)$

On peut alors écrire, d'après ce qui précède que le retour est $r(p)=k\cdot Y(p)$

Ainsi, dans la chaine directe, on aura $\dfrac{1}{p\cdot\left[f+M\cdot p\right]}$ D'où le schéma bloc :



Rep. App11 : Système Mécanique 3

Dans ce système, on peut écrire $J\cdot\theta''(t)=C_m-f\cdot\theta'-k\theta$

Avec les conditions initiales, on a $H(p)=\dfrac{\Theta(p)}{C_m(p)}=\dfrac{1}{k+f\cdot p+J\cdot p^2}=\dfrac{\frac{1}{J}}{\frac{k}{J}+\frac{f}{J}\cdot p+p^2}$

On procède de la même façon que dans le **Système mécanique 2** en remplaçant M par J.

Rep. App12 : Système Pneumatique

Dans ce système, on suppose l'écoulement comme étant laminaire.

En appliquant, le théorème de Bernoulli, on écrit :

$P_2-P_1+\rho\dfrac{V_2^2-V_1^2}{2}+\rho g(h_2-h_1)=0=Cte$ c.à.d; $P+\rho\dfrac{V^2}{2}+\rho gh=Cte$; on pose $P+\rho gh=p$

On dérive par rapport au temps : $\dfrac{dp}{dt}+\rho\cdot V\dfrac{dV}{dt}=0$ on multiplie par S : $S\cdot\dfrac{dp}{dt}+\rho\cdot V\cdot S\cdot\dfrac{dV}{dt}=0$

ce qui donne : $S\cdot\dfrac{dp}{dt}+\rho\cdot q_v\cdot a=0$ (a c'est l'accélération constante)

Le débit massique est $q_m=\rho\cdot q_v$ d'où $\dfrac{dp}{dt}+q_m\cdot\dfrac{a}{S}=0\Rightarrow\dfrac{dp}{dt}=-q_m\cdot\dfrac{a}{S}$ et comme le débit massique dans la canalistion est proportionnel à la différence de pressions, on peut alors écrire pour la sortie :

$\dfrac{dp_2}{dt}=-k(p_2-p_1)$ compte-tenu des conditions initiales, on écrit $H(p)=\dfrac{P_2(p)}{P_1(p)}=\dfrac{k}{k+p}=\dfrac{1}{1+\frac{p}{k}}$

1er ordre : gain statique $K=1$ et $\tau=\dfrac{1}{k}$

On en déduit facilement le schéma bloc comme le **Système mécanique 1 (A)** avec f = 1 ainsi que la fréquence initialle.

Rep. App13: Système Hydraulique

Dans ce système, le débit du maitre-cylindre $q_v = S \cdot V = S \cdot y'(t)$ est proportionnel au déplacement du distributeur $k \cdot x(t) \Rightarrow S \cdot y'(t) = k \cdot x(t)$

La fonction de transfert s'écrit $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{k}{p}$: c'est un intégrateur.

Si l'on envoie un échelon en entrée, on sort une rampe.

Rep. App14 : Système asservi en régime continu

1- $T = \dfrac{Xr}{E} = H_0 \cdot K_0 = 1800 \cdot 0,1 = 180$

2- $T' = \dfrac{Y}{Ye} = \dfrac{T}{1+T} = \dfrac{180}{181} = 0,9944$

3- $Ye = 10:\ X = Ye \cdot K_0 = 1;\ Y = T' \cdot Ye = 0,9944 \cdot 10 = 9,944;$

$Xr = Y \cdot K_0 = 9,944 \cdot 0,1 = 0,9944;\ E = X - Xr = 1 - 0,9944 = 0,0056$.

4- Erreur absolue : $\varepsilon = Y - Ye = Ye \cdot \dfrac{T}{1+T} - Ye = -Ye \cdot \dfrac{1}{1+T} = -\dfrac{10}{181} = -0,0552$

Erreur relative : $e_r = \dfrac{Y - Ye}{Ye} = \dfrac{Ye \cdot \dfrac{T}{1+T} - Ye}{Ye} = -\dfrac{1}{1+T} = -\dfrac{1}{181} = -0,0055$

5- Erreur absolue : $\varepsilon = -Ye \cdot \dfrac{1}{1+T} = -\dfrac{10}{361} = -0,0277$

Erreur relative : $e_r = -\dfrac{1}{1+T} = -\dfrac{1}{361} = -0,00277$

L'erreur diminue si la valeur absolue du gain de boucle augmente

Rep. App15 : Le principe de la régulation de vitesse

1- La vitesse de rotation à vide n_0 si C = 0 : $n_0 = 1000\ tr/mn$

La vitesse de rotation en charge n_1 si C ≠ 0 : $n_1 = 1000 - 50 = 950\ tr/mn$

La variation relative de vitesse due à la charge : $\dfrac{\Delta n}{n_0} = \dfrac{n_0 - n_1}{n_0} = \dfrac{1000 - 950}{1000} = 0,05$

2- 3- $n = \dfrac{50 \cdot 1000}{1 + 0,01 \cdot 50 \cdot 1000} \cdot x$ pour avoir 1000 *tr/mn*, il faut : $x = 10,2\ V$

4- Relation entre la sortie n, x et C : $n = \dfrac{50 \cdot 1000}{1 + 0,01 \cdot 50 \cdot 1000} \cdot x - \dfrac{5C}{1+50} = \dfrac{5000}{1+50} \cdot x - \dfrac{5C}{1+50}$

5- Nouvelle valeur n_2 de la vitesse en charge pour la valeur de consigne $x_0 = 10,2\ V$:

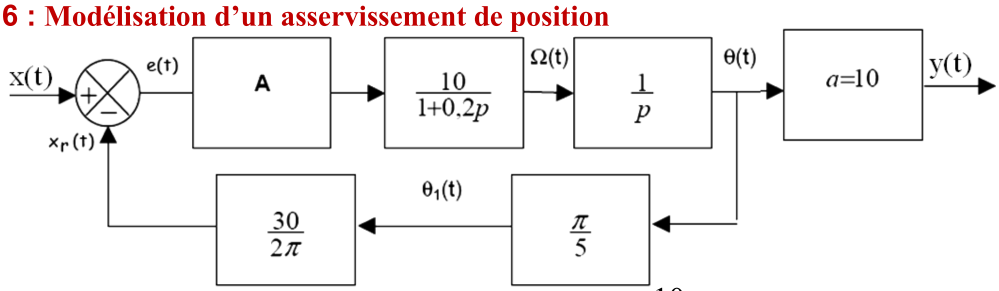
$n_2 = \dfrac{5000}{1+50} \cdot 10,2 - \dfrac{5 \cdot 10}{1+50} = 999,019\ tr/mn;$

Soit la nouvelle variation relative de vitesse : $\dfrac{\Delta n}{n_0} = \dfrac{n_0 - n_2}{n_0} = \dfrac{1000 - 999,019}{1000} = 0,000981$

6- Si on veut encore diminuer l'erreur, il faut augmenter le gain de l'ampli.
En pratique, cette augmentation peut conduire à l'instabilité.

Rep. App16 : Modélisation d'un asservissement de position

1-



2- Transmittance de boucle fermée : $T(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}=\dfrac{\frac{10}{3}}{1+\frac{1}{30A}p+\frac{0,2}{30A}p^2}$

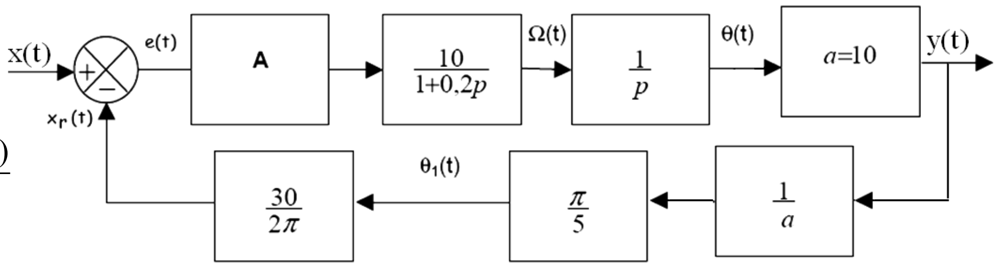
En régime permanent $T_0=\dfrac{10}{3}$ une excursion de ±15 V à l'entrée donne donc une variation pour y de ±50 mm.

3- $x_r=y\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\pi}{5}\cdot\dfrac{30}{2\pi}$ ce qui donne : $K=\dfrac{x_r}{y}=\dfrac{3}{10}=0,3\ V/mm$

On a $y(t)=\dfrac{10}{3}x(t)$ et

$x_r(t)=0,3\cdot y(t)$

donc : $y(t)=\dfrac{x(t)}{0,3}=\dfrac{x_r(t)}{0,3}$



Rep. App17 : Réponse d'un système asservi du 1[er] ordre

1- $T(p)=\dfrac{10A}{1+0,1p}$ **2-** $T'(p)=\dfrac{10A}{1+10A+0,1p}$

3- $T'(p)=\dfrac{500}{501+0,1p}=\dfrac{0,9980}{1+0,0019p}$ une entrée de 2 donne une sortie 2.0,9980 = 1,996

soit une erreur de 2 -1,996 = 0,004 et relative de 0,004/2 = 0,2%

4- La sortie se stabilise à 1,996 avec un temps de réponse à 5% : tr = 3τ = 0,6 ms