LA STATIQUE PLANE

OBJECTIFS

- Énoncer le principe fondamental de la statique, le principe des actions mutuelles et le principe de transmissibilité des forces.
- Proposer une méthode de résolution des problèmes de statique.
- Développer la notion fondamentale d'isolement d'un solide.
- Indiquer les principaux cas d'équilibre et les équations correspondantes.
- Fournir une schématisation et une représentation des actions mécaniques.
- Indiquer les principales méthodes de résolution graphique.
- Définir la notion de problème hyperstatique.

I-INTRODUCTION :

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels ou d'un solide.
En statique les solides sont supposés :
-Géométriquement parfaits : Les aspérités et les défauts de formes, les états de surfaces, ne sont pas pris en compte. Les surfaces sont modélisées par des plans, des cylindres…
- Indéformables : On ne tient pas compte des déformations sous les efforts.
*- Homogènes :*Constituer de même atomes, c'est-à-dir,même masse volumique partout (kg/m^3)
- Isotropes :Même répartition des atomes, c'est-à-dir, chaque morceau de matière a le même comportement dans toutes les directions.
(matériau non isotrope comme le verre qui se casse sous l'effet de la chaleur).

II- ACTION MÉCANIQUE :

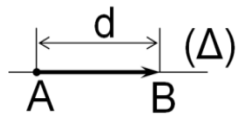
D'une façon générale, on appelle **action mécanique** toute cause physique capable de :
- Maintenir un corps au repos,
-Créer, maintenir ou modifier un mouvement,
-Déformer un corps.

III- NOTION DE FORCE :

On appelle **force** l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact.
Cette force est modélisable par un « **vecteur-force** » ou « **glisseur** ».
Une force est caractérisée géométriquement par : - Point d'application ;
- Direction ou droite d'action ou support
- Sens
- Norme ou intensité ou module (en Newton N).

Exemple 1 :

1- Soit le dessin ci-contre :



1.a- Quels sont les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

. . . .
. . . .

1.b- Quels sont les caractéristiques de la force $\overrightarrow{AB}$?

. . . .
. . . .

2- Écrire les coordonnées cartésiennes F_X et F_Y en fonction du module $\|\vec{F}\|$ et des angles α et ou β des forces $\vec{F}$ indiquées sur les figures a, b, c et d.

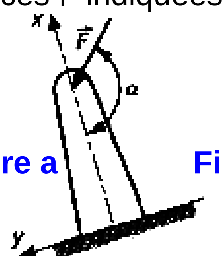
Figure a


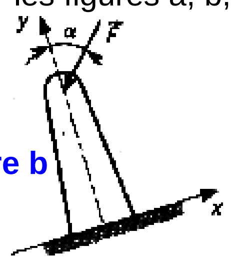
Figure b


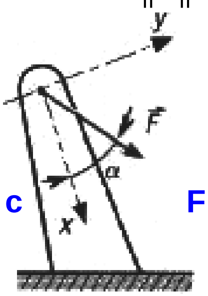
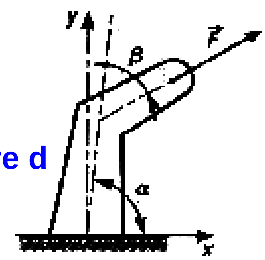
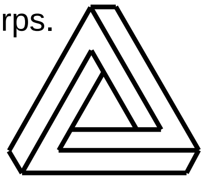
Figure c


Figure d


IV- CLASSIFICATION DES ACTIONS MÉCANIQUES :

Les actions mécaniques sont de deux sortes :
- Les actions mécaniques **à distance** (champ de pesanteur, champ électromagnétique)
- Les actions mécaniques **de contact** (liaisons …)

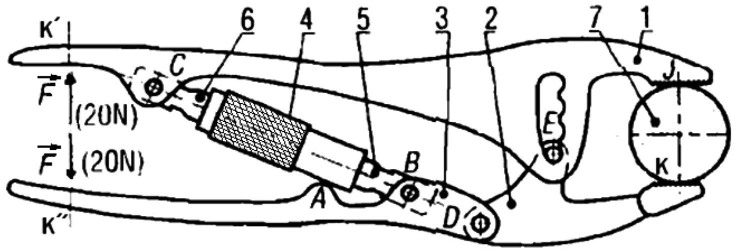
On distingue les actions mécaniques **extérieures** et **intérieures** à un ensemble de corps.



Exemple 2 : *PINCE ÉTAU*

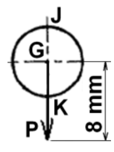
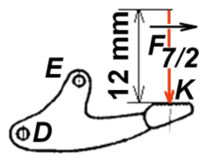
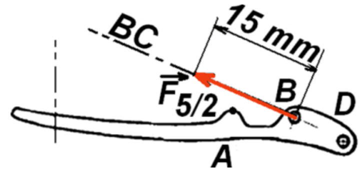
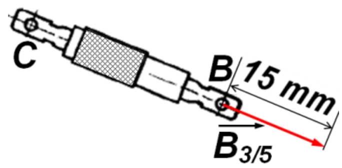
La pince étau proposée se compose de (voir la nomenclature)

Les poids des pièces sont négligés **sauf de la pièce (7)**.

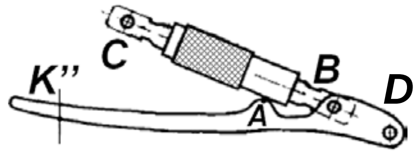
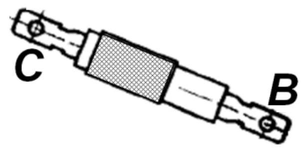
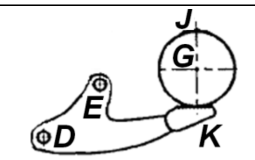


7	1	Pièce a serrée	60 Cr 35	
6	1	Vis à droite		
5	1	Vis à gauche		
4	1	Écrou moleté		
3	1	poignée		
2	1	Bec	C 40	
1	1	Manche	E 335	
Rep	**Nbr**	**Désignation**	**matière**	**observation**

1- Retrouver les éléments des forces indiquées ci-dessous avec l'échelle des forces 2 mm⟶ 3 N

Ensemble isolé / Forces				
L'ensemble isolé	....	....	....	....
Point d'application	....	....	....	....
Direction	....	....	....	....
Sens	....	....	....	....
Intensité	....	....	....	....

2-Compléter le tableau ci-dessous :

Ensemble considéré				
élément isolé	....	....	....	......
Forces extérieures	....	....	....	......
Forces intérieures	....	....	....	......

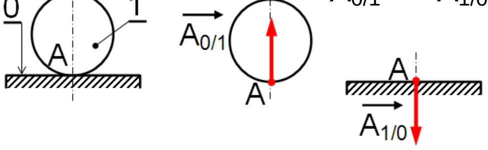
Remarque : Si le **contact est parfait**, c'est-à-dire, **pas de frottement** l'action de contact en un point est **perpendiculaire** au plan tangent commun aux deux surfaces

V- PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES (RÉCIPROQUES) :

Pour deux solides 0 et 1 en contact, l'action exercée par le solide 0 sur le solide 1 est égale et opposée à l'action exercée par le solide 1 sur le solide 0

Théorème 1 : Si le solide 1 exerce une force $\overrightarrow{F_{1/0}}$ sur le solide 0, de même le solide 0 exerce sur le solide 1, une force $\overrightarrow{F_{0/1}}$. Ces deux forces ont même module, même point d'application, même support mais le sens est opposé ; $\overrightarrow{F_{1/0}} = -\overrightarrow{F_{0/1}}$

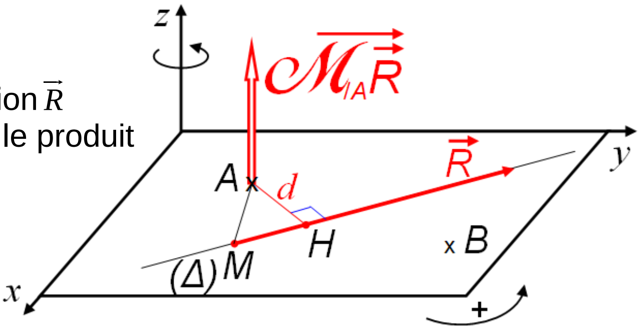
$\overrightarrow{A_{0/1}} = -\overrightarrow{A_{1/0}}$



1 isolé 0 isolé

VI- NOTION DE MOMENT :

Moment d'une force par rapport à un point :



On appelle moment par rapport au point *A* de la réaction $\vec{R}$ appliquée au point *M*, le vecteur d'origine *A* défini par le produit vectoriel de la relation suivante : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}R} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$

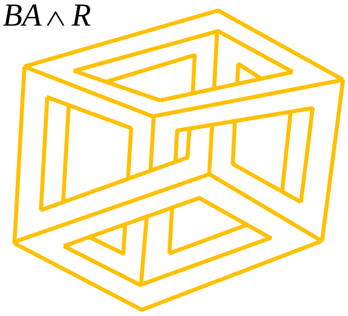
♦Un moment est caractérisée par :
- Point d'application ici :
- Direction ou droite d'action ou support ici :
- Sens ici :
- Norme ou intensité ou module ici : $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}R}\right\| =$

♦ $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}R} \perp$ *au plan* $\left(\overrightarrow{AM}, \vec{R}\right)$

♦ $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{R} = -\vec{R} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{MA}$

♦ $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/B}R} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{R} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{R} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$ donc : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/B}R} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$

♦ $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}R}\right\| = 0$, si $\vec{R}$ passe par A (d = 0) ou si $\vec{R} = 0$



Remarque : Si $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et $\vec{R}\begin{vmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{vmatrix}$; alors : $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot R_z - z \cdot R_y \\ z \cdot R_x - x \cdot R_z \\ x \cdot R_y - y \cdot R_x \end{pmatrix}$

VII- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE : (PFS)

Un solide (S) en équilibre sous l'action de ***n*** forces extérieures ($\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, ..., \vec{F_n}$) reste en équilibre si et seulement si :

- La somme vectorielle de toutes les forces (de 1 à n) extérieures sur ce solide est nulle :

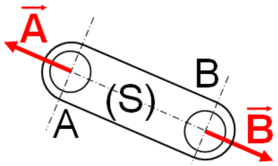
$\sum_{i=0}^{n} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F_n} = \vec{0}$: Théorème de la Résultante Statique

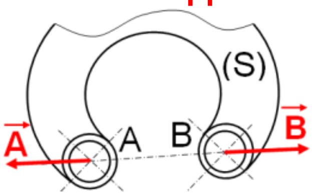
- La somme vectorielle des moments de toutes les forces extérieures (de 1 à n)en un même point A de l'espace est nulle :

$\sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}F_i} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}F_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}F_2} + ... + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}F_n} = \vec{0}$: Théorème du Moment résultant Statique

7.1- Solide soumis à l'action de deux forces :

Théorème 2 : Si le solide (S) est en équilibre sous l'action de deux forces ($\vec{A}$ et $\vec{B}$) ; ces deux forces ont même intensité, même support mais sens opposé. $\vec{A} = -\vec{B}$; $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$





7.2- Solide soumis à l'action de trois forces :

Théorème 3 : Si le solide (S) est en équilibre sous l'action de trois forces ($\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$) non parallèles ; ces trois forces sont coplanaires et concourantes en un même point , et $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$,c'est-à-dire, $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ (pour la résolution graphique utiliser polygone fermé ou triangle des forces fermé ou dynamique - funiculaire),

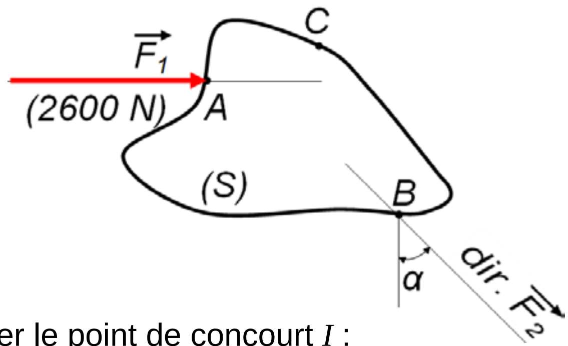
et $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}F_{ext}} = \vec{0}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}B} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A}C} = \vec{0}$

Méthode de résolution graphique ''polygone fermé'' (3 forces non parallèles) :

Hypothèses : on doit connaître :
- le point d'application, direction, sens et la norme de la 1ère force (force entièrement connue) ;
- le point d'application et la direction de la 2ème force ;
- le point d'application de la 3ème force ;
- échelle des forces.

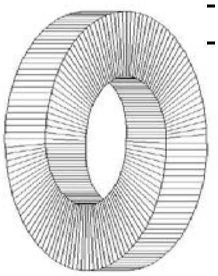
1ère étape : Isolement de (S) :

Forces	Point d'application	Direction	Sens	Intensité
$\vec{F}_1$	A	—	→	2600 N
$\vec{F}_2$	B	α	?	?
$\vec{F}_3$	C	?	?	?

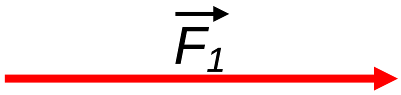


2ème étape : Prolonger les deux directions connues et trouver le point de concourt I :
3ème étape : Les trois forces étant concourantes en I tracer (CI) direction de $\vec{F}_3$
4ème étape : - Tracer $\vec{F}_1$ à l'échelle souhaitée et fermer le triangle des forces avec les parallèles de $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ (Exemple d'échelle : 1 mm pour 50 N)
- Fermer le triangle des forces ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$)

Remarque : - Une fois le triangle fermé, mesurer la dimension de $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ et donner la correspondance en Newton.
- Replacer les efforts sur la figure d'origine.
- Il existe toujours deux possibilités pour tracer le triangle des forces ; l'ensemble des deux forme un parallélogramme.



Traçage du polygone fermé :



$\|\vec{F}_2\| =$

$\|\vec{F}_3\| =$

Théorème 3' : Si le solide (S) est en équilibre sous l'action de trois forces ($\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$) parallèles ; ces trois forces sont coplanaires, et $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$,c'est-à-dire, $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ (utiliser dynamique - funiculaire pour la résolution graphique),

et $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A} \vec{F}_{ext}} = \vec{0}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/A} \vec{A}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A} \vec{B}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/A} \vec{C}} = \vec{0}$

Méthode de résolution graphique ''dynamique et funiculaire'' (3 forces parallèles) :

Hypothèses : on doit connaître :
- le point d'application, direction, sens et la norme de la 1ère force (force entièrement connue) ;
- le point d'application et la direction de la 2ème force ;
- le point d'application de la 3ème force ;
- échelle des forces.

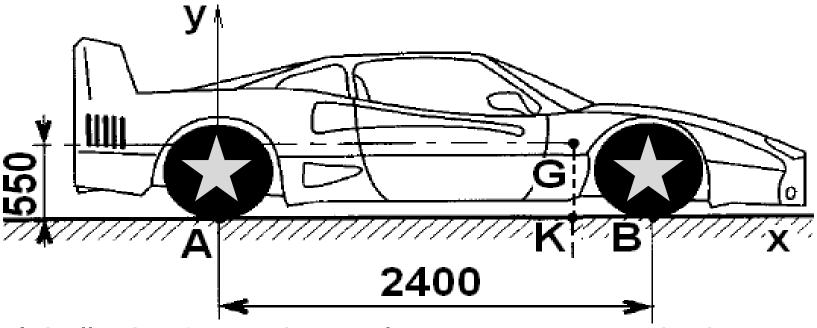
Statique graphique - Méthode de la dynamique - funiculaire

Cette méthode, intéressante dès que les forces à manipuler sont nombreuses, permet de déterminer des résultantes et résoudre des problèmes d'équilibre, avec des forces parallèles ou concourantes. La méthode est purement graphique.

Exemple 3 : *VOITURE DE COURSE*

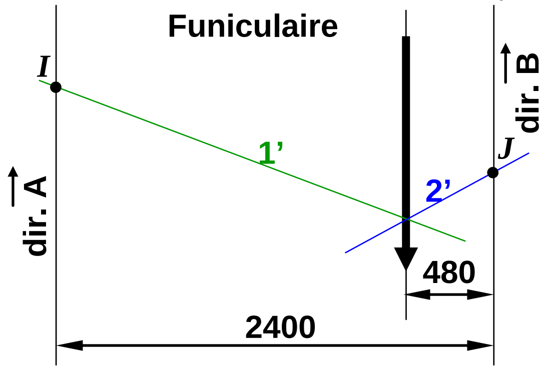
Pour la voiture de course proposée, déterminons **graphiquement** et **analytiquement** les actions $\vec{A}$ et $\vec{B}$ exercées par le sol sur les roues en A et B. On se place dans le plan de symétrie du véhicule. À l'arrêt, la masse m = 1240 kg de celui-ci, le sol est supposé horizontal et $\vec{P}$, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles. On donne BK = 480 mm et g = 10 m/s^2.

Échelle : 1 cm pour 300 daN

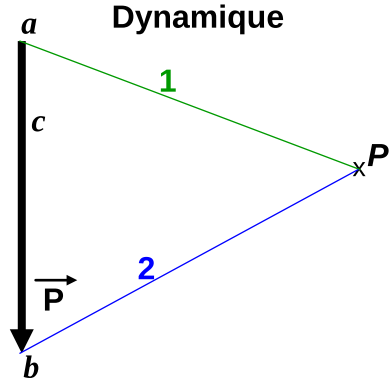


Ordre des tracés

- Commencer le dynamique : choisir une échelle des forces (exemple : 1 cm pour 300 daN) ; tracer $\vec{P} = \vec{ab}$ (1240 daN) ; choisir un pôle ***P*** ; tracer les côtés *P*a(1) et *P*b(2).
- Commencer le funiculaire : tracer 1' parallèle à 1 et 2' parallèle à 2 se coupant sur $\vec{P}$.

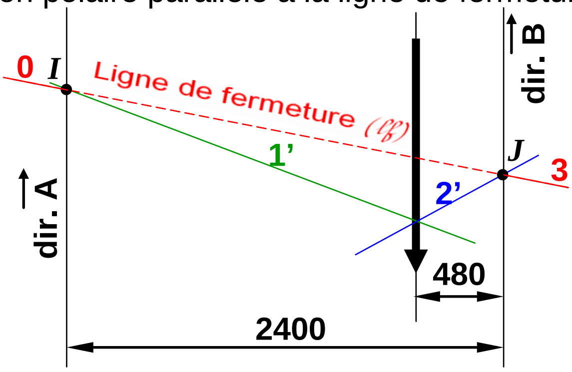


avec
0 // 0'
1 // 1'



Pour tout solide en équilibre, les côtés extrêmes du funiculaire sont confondus ; la droite commune est appelée ligne de fermeture *(lf)*. Le funiculaire est dit fermé.

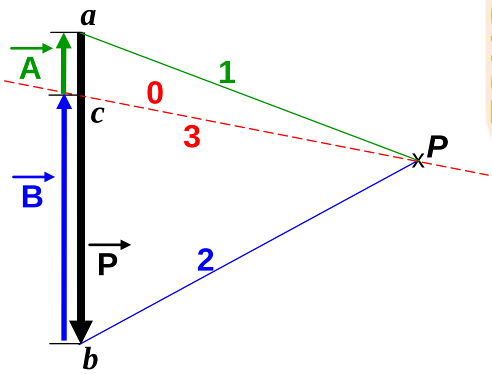
Remarque 1 : si sur le dynamique les forces respectent l'ordre $\vec{A} = \vec{ca}$, $\vec{P} = \vec{ab}$ et $\vec{B} = \vec{bc}$ avec $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{ca} + \vec{ab} + \vec{bc} = \vec{0}$,le point c est situé sur $\vec{P}$ entre a et b et (*P*c) est le rayon polaire parallèle à la ligne de fermeture qui ne peut être que la droite (*IJ*).



avec
0 // 0'
1 // 1'

$\|\vec{A}\| =$

$\|\vec{B}\| =$



Les côtés extrêmes (0' et 3') du funiculaire sont confondus avec la ligne de fermeture (*IJ*).
Par correspondance, les rayons polaires (0 et 3) sont confondus avec *P*c.

Remarque 2 : sur le dynamique, les actions situées entre deux rayons polaires (0 et 1), (1 et 2), (2 et 3) sont celles qui, sur le funiculaire, sont situées à l'intersection des lignes portant les repères équivalents (0' et 1'), (1' et 2'), (2' et 3').

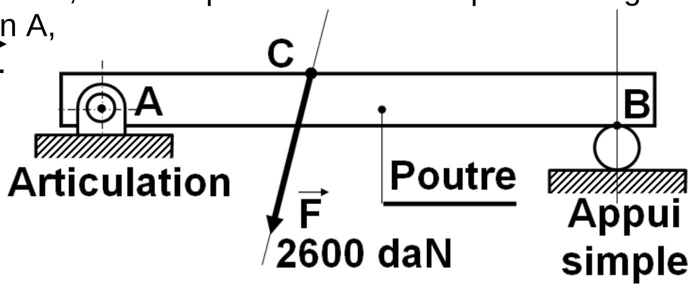
FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : LA STATIQUE PLANE

Exemple 4 : **Étude de l'équilibre d'un solide sous l'action de forces concourantes**

Une poutre, articulée en A et en appui simple en B, supporte une charge inclinée de 2600 daN en C.

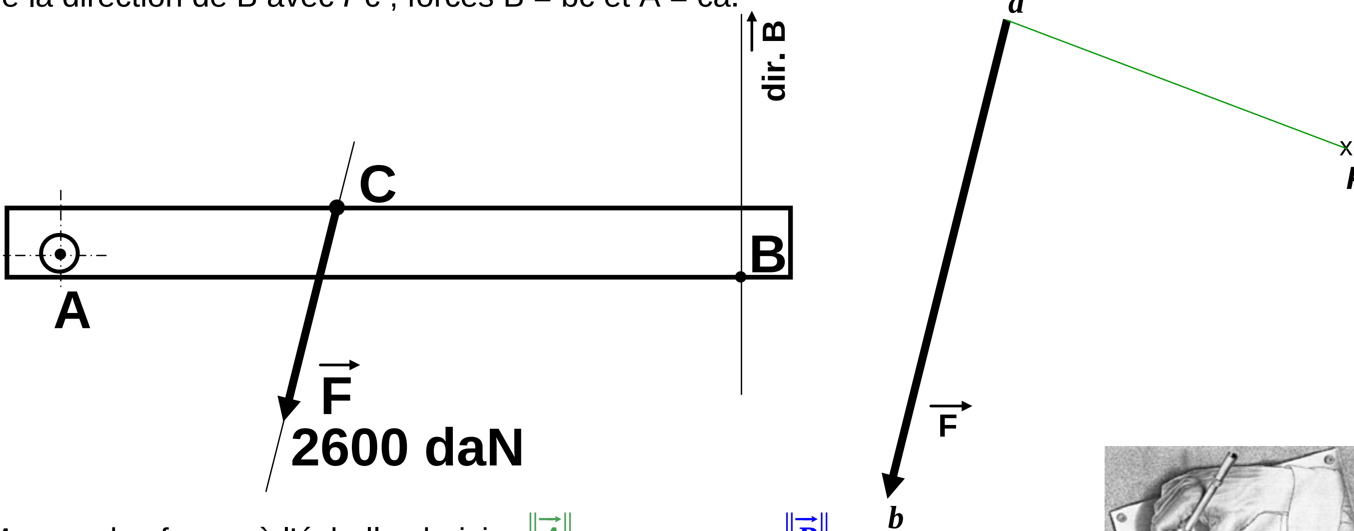
Déterminer les actions $\vec{A}$ et $\vec{B}$ exercées par les appuis en A et B.

Remarque : la méthode est analogue à celle du paragraphe précédent.
Pour réussir la construction du funiculaire, il faut impérativement faire passer la ligne de fermeture par le point d'application A, seul point connu de la direction de $\vec{A}$.

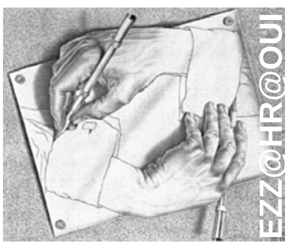


Ordre des constructions :

Choix d'une échelle des forces (exemple : **1 cm pour 400 daN**) ; $\vec{F} = \vec{ab}$; pôle P ;
rayons polaires *P*a(1) et *P*b (2) ; direction de $\vec{B}$ à partir de b ; 1' parallèle à 1 passant par A ;
2' parallèle à 2 ; ligne de fermeture AJ ; rayon *P*c (0 ou 3) parallèle à AJ ; point c, intersection de la direction de $\vec{B}$ avec *P*c ; forces $\vec{B} = \vec{bc}$ et $\vec{A} = \vec{ca}$.

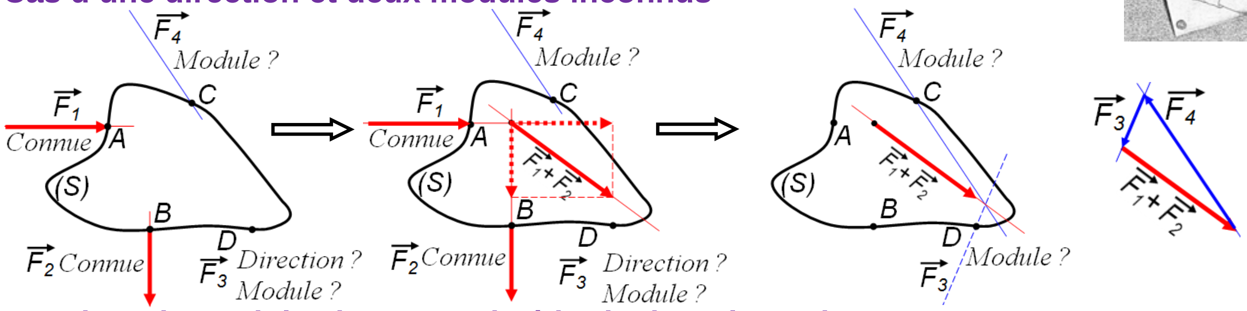


Mesure des forces à l'échelle choisie : $\|\vec{A}\| =$; $\|\vec{B}\| =$



Remarque : Équilibre sous l'action de 4 forces.

Cas d'une direction et deux modules inconnus



Cas de trois modules inconnus (méthode de Culmann)