



**FLEXION PLANE (SIMPLE)**

**I- HYPOTHÈSE :**

- ◆ **Solide idéal** : matériau homogène ; isotrope ; poutre rectiligne de sections constantes avec plan de symétrie (P)
- ◆ **Les actions extérieures** sont  $\perp$  à la ligne moyenne.
- ◆ **Les forces appliquées** sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.

$$\{A_{2/1}\}_A = \begin{Bmatrix} A_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix}_A, \{C_{4/1}\}_C = \begin{Bmatrix} C_{4/1} \\ 0 \end{Bmatrix}_C, \{D_{5/1}\}_D = \begin{Bmatrix} D_{5/1} \\ 0 \end{Bmatrix}_D \text{ et } \{B_{3/1}\}_B = \begin{Bmatrix} B_{3/1} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

Avec  $\vec{A}_{2/1} = \|\vec{A}_{2/1}\| \cdot \vec{y}$ ,  $\vec{C}_{4/1} = -\|\vec{C}_{4/1}\| \cdot \vec{y}$ ,  $\vec{D}_{5/1} = -\|\vec{D}_{5/1}\| \cdot \vec{y}$  et  $\vec{B}_{3/1} = \|\vec{B}_{3/1}\| \cdot \vec{y}$

**II- DÉFINITION :**

Une poutre est sollicitée à la flexion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) de la poutre sur la partie gauche (I), peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (II), à une **résultante contenue dans le plan de symétrie et un moment perpendiculaire à ce dernier**, tel que :

( $T_y \neq 0$  : flexion simple et si  $T_y = 0$  : flexion pure)

$$\{Coh_{II/I}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fGz} \end{Bmatrix}_G \text{ dans } R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } \{Coh_{II/I}\}_G = -\{F_{ext} \text{ à gauche} / I\}_G = +\{F_{ext} \text{ à droite} / II\}_G$$

**III- CONTRAINTES NORMALES :**

Lorsque la poutre fléchit, la section droite plane ( $S_2$ ), par exemple, pivote d'un angle  $\Delta\varphi$  autour de l'axe ( $G_2, \vec{z}$ ) perpendiculaire au plan de symétrie. On constate que :

- ◆ Les fibres contenues dans le plan passant par les barycentres G des sections ( $S_1$ ) ne changent pas de longueur, les contraintes  $\vec{\sigma}_M$  sont donc nulles en ces points.
- ◆ Les autres fibres s'allongent ou se raccourcissent. Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à l'ordonnée qui les séparent du plan des fibres neutres, d'où :  $\sigma_M = -E \cdot \theta \cdot y$

$\sigma_M$  : contrainte normale au point M due à la flexion (MPa).  
E : module d'élasticité longitudinal (d'Young) (MPa).  
y : ordonnée du point M / au plan de la fibre neutre (mm).

$\theta$  : angle unitaire de flexion (rad/mm) avec :  $\theta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$

**IV- VALEURS DES CONTRAINTES NORMALES :**

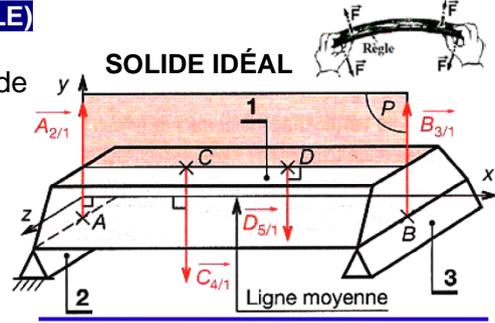
En un point quelconque M, de la section droite, on a :  $\sigma_M = -\frac{M_{fGz}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y)$

$\sigma_M$  : contrainte normale en M due à la flexion (MPa).  
 $M_{fGz}$  : moment de flexion selon ( $G, \vec{z}$ ) dans (S) (N .mm).  
 $I_{Gz}$  : moment quadratique de la section droite (S) / à ( $G, \vec{z}$ ) (mm<sup>4</sup>).  
y : ordonnée du point M dans  $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  (mm).

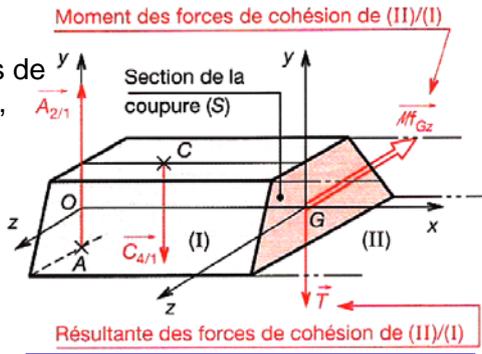
En un point M, le plus éloigné de ( $G, \vec{z}$ ), on écrit que :

$$\sigma_{M \max i} = -\frac{M_{fGz \max i}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y_{\max i})$$

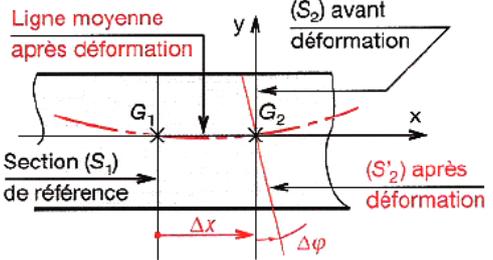
$y_{\max i} = v$  : ordonnée du point le plus éloigné de ( $G, \vec{z}$ ) (mm).  
 $\frac{I_{Gz}}{y_{\max i}} = \frac{I_{Gz}}{v}$  : module de flexion de la section droite (S) (mm<sup>3</sup>).  
 $y_{\max i}$  v



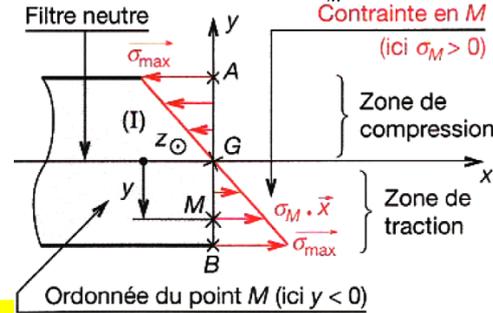
**ISOLEMENT DU TRONÇON GAUCHE**



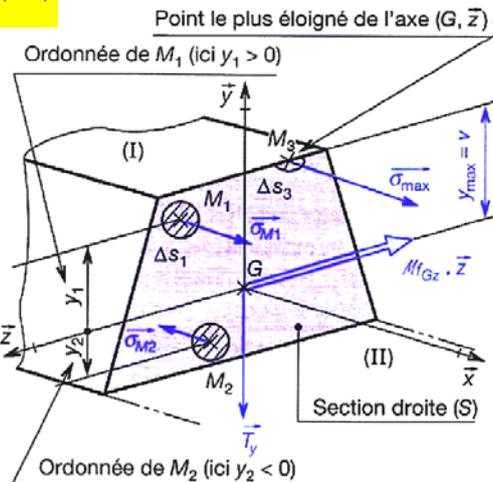
**ANGLE UNITAIRE**



**RÉPARTITION DES  $\vec{\sigma}_M$  DANS (S)**



**CONTRAINTES NORMALES**



FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique



**V- CONDITION DE RÉSISTANCE :**

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la résistance pratique à l'extension. On définit  $R_{pe}$  par le quotient de la résistance élastique à l'extension  $R_e$  par le coefficient de sécurité "s"

$$|\sigma|_{\max i} = \frac{|M_{fGz}|_{\max i}}{I_{Gz}} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

$R_{pe}$ : résistance pratique à l'extension en (Mpa).  
 $R_e$ : résistance élastique à l'extension en (Mpa).  
s : coefficient de sécurité (sans unité).

**VI- SOLIDE RÉEL :**

Les poutres présentent souvent de brusques variations de sections. Dans les zones proches de ces variations, les formules précédentes ne s'appliquent plus. La répartition des contraintes n'est plus linéaire.

$\sigma_{eff \max i}$  : contrainte maximale effective (MPa).

$\sigma_{thé}$  : contrainte théorique sans concentration (MPa).

$K_f$  : coefficient de concentration de contrainte relatif à la flexion, déterminé par tableaux ou abaques.

**Il y a concentration de contrainte.**

$$|\sigma_{eff}|_{\max i} = K_f \cdot |\sigma_{thé}|$$

**VII- EFFORTS INTÉRIEURS :** (Efforts tranchants et moments fléchissants) :

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant  $T_y$  (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant  $M_{fGz}$  (perpendiculaire à la ligne moyenne et à  $T_y$ ).

REMARQUE : La valeur des **efforts tranchants** et des **moments fléchissant** varie avec la position "x" de la coupure.

Les diagrammes des  $T_y$  (effort tranchant) et des  $M_{fGz}$  (moment fléchissant) graphes mathématiques permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums qui seront utilisés lors des calculs des **contraintes**.

Ex 1 - Soit une poutre 1 modélisée par sa ligne moyenne AB, le bâti supporte la poutre en A et B.

- Calculer la réaction en A ; la réaction en B ;
- Calculer l'effort tranchant  $T_y$  ; le moment fléchissant  $M_{fGz}$ .
- Tracer le diagramme de  $T_y$  et de  $M_{fGz}$ .

Application numérique :

La réaction en C égale 200 daN ;

La distance a = 2 m ; La distance  $\ell = 3$  m.

**RÉPONSE : PFS :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{R}_B = \vec{0}$$

Proj / oy :  $R_A - R_C + R_B = 0$

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{R}_C) + M_A(\vec{R}_B) = \vec{0}$$

Proj / oz :  $0 - R_C \cdot a + R_B \cdot \ell = 0$

$$\triangleright R_B = \frac{R_C \cdot a}{\ell} = 133,33 \text{ daN}$$

$$\triangleright R_A = R_C - R_B = R_C \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) = 66,66 \text{ daN}$$

zone AC :  $A \leq G \leq C$  ;  $0 \leq x \leq a$

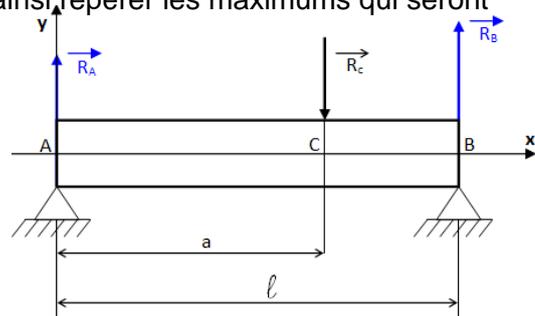
$$\triangleright T = -R_A = -66,66 \text{ daN}$$

$$\triangleright M_{fGz} = -(-R_A \cdot x)$$

si  $\begin{cases} x = 0 : M_{fGz} = 0 \text{ daN.m} \\ x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = 133,33 \text{ daN.m} \end{cases}$

REMARQUE : on trouve

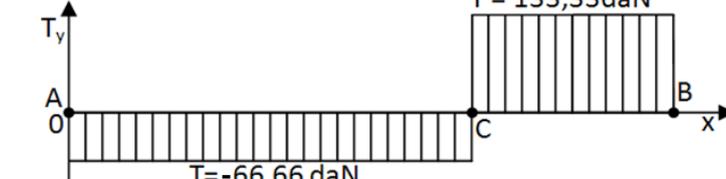
$$T_y = -\frac{dM_{fGz}(x)}{dx} \quad \text{et} \quad T_z = \frac{dM_{fGy}(x)}{dx}$$



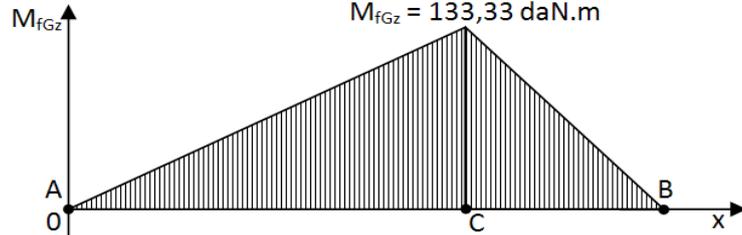
- zone CB :  $C \leq G \leq B$  ;  $a \leq x \leq \ell$
- $\triangleright T = +R_B = 133,33 \text{ daN}$
- $\triangleright M_{fGz} = [+R_B \cdot (\ell - x)]$

si  $\begin{cases} x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = R_B \cdot (\ell - a) = +133,33 \text{ daN.m} \\ x = \ell : M_{fGz} = -[-R_A \cdot \ell + R_C \cdot (\ell - a)] = [+R_B \cdot (\ell - \ell)] = 0 \end{cases}$

Échelle des efforts tranchants : 1 cm  $\rightarrow$  121,2 daN  
 $T = 133,33 \text{ daN}$



Échelle des moments fléchissants : 1 cm  $\rightarrow$  55,09 daN.m  
 $M_{fGz} = 133,33 \text{ daN.m}$



FONCTION CONVERTIR L'ÉNERGIE : Aspect Physique